бюджетное профессиональное образовательное учреждение

Вологодской области «Вологодский колледж технологии и дизайна»

УТВЕРЖДЕНО

приказом директора

БПОУ ВО «Вологодский

колледж технологии и дизайна»

от 31.08.2022 № 580

**Методические рекомендации**

**по выполнению практических занятий**

**по учебному предмету**

**ОУДП.04 Математика**

**для специальностей гуманитарного профиля**

**54.02.01 Дизайн (по отраслям)**

Вологда

2022

Методические рекомендации составлены в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом среднего общего образования и рабочей программой учебной дисциплины.

Организация-разработчик:

БПОУ ВО «Вологодский колледж технологии и дизайна»

Разработчик:

Ускова Л.В., преподаватель БПОУ ВО «Вологодский колледж технологии и дизайна»

Рассмотрена и рекомендована к использованию в учебном процессе   
предметной цикловой комиссией общеобразовательных учебных дисциплин,

Протокол № 1 от 31.08.2022

**ВВЕДЕНИЕ**

**Практические занятия** - одна из важнейших форм контроля самостоятельной работой обучающихся над учебным материалом, качеством его усвоения. Готовясь к практическим занятиям, обучающиеся должны изучить рекомендованную литературу: первоисточники, соответствующие разделы учебников, учебных пособий, конспекты лекций и т.д.

**Цель практических занятий –** формирование практических умений: выполнение определённых действий, операций, необходимых в последующей профессиональной или учебной деятельности. В связи с этим содержанием практических занятий является решение задач, выполнение вычислений, расчётов, работа с литературой, работа с лекциями, справочниками, инструкциями. Выполнению практических занятий может предшествовать проверка знаний обучающихся, их теоретической готовности к выполнению заданий.

**Формы** организации деятельности обучающихся на практических занятиях - групповая.

**Структура и содержание** практического занятия включает в себя следующие элементы:

* тема занятия;
* цель работы;
* описание хода работы;
* примеры выполнения заданий по теме (при необходимости),
* контрольные вопросы.
* оценка результатов работы - оценки за выполнение заданий на практических занятиях выставляются по пятибалльной системе или в форме зачёта и учитываются как показатели текущей успеваемости обучающихся.

**Перечень практических занятий**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Тема | Кол-во часов |
|  | Практическая работа: Действия с числовыми выражениями. | 1 |
|  | Практическая работа: Тождественные преобразования алгебраических выражений. | 1 |
|  | Практическая работа: Линейные и квадратные уравнения, системы уравнений. | 1 |
|  | Практическая работа: Линейные и квадратные неравенства, системы неравенств. | 1 |
|  | **Входная контрольная работа** | 1 |
|  | Практическая работа по теме «Функции. Свойства функций» | 3 |
|  | Числовая окружность. Нахождение точек по их координатам на числовой окружности. Определение координат точек окружности. | 2 |
|  | Преобразования простейших тригонометрических выражений. | 3 |
|  | Формулы приведения. | 2 |
|  | Преобразования графиков тригонометрических функций | 4 |
|  | **Контрольная работа** по теме «Тригонометрические функции» | 1 |
|  | Практическое занятие: Решение простейших тригонометрических уравнений. | 2 |
|  | Практическое занятие: Решение тригонометрических уравнений | 4 |
|  | **Контрольная работа** по теме «Тригонометрические уравнения» | 1 |
|  | Практическое занятие: Преобразование простейших тригонометрических выражений. | 4 |
|  | **Контрольная работа** по теме «Формулы тригонометрии» | 1 |
|  | Практическое занятие: «Техника вычисления пределов» | 4 |
|  | Практическое занятие: «Техника дифференцирования» | 2 |
|  | Практическое занятие: Составление уравнений касательной. | 1 |
|  | Практическое занятие: Применение производной к исследованию функций и построению графиков. | 4 |
|  | Практическое занятие: Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке. | 2 |
|  | **Контрольная работа** по теме «Производная и её применение» | 1 |
|  | Практическое занятие: «Решение задач на взаимное расположение прямых и плоскостей» | 1 |
|  | Практическое занятие: «Решение задач на перпендикулярность прямой и плоскости» | 1 |
|  | Практическое занятие: Решение задач по теме «Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью» | 4 |
|  | Практическое занятие: «Двугранный угол, линейный угол двугранного угла. Перпендикулярность плоскостей» | 2 |
|  | **Контрольная работа** по темам «Параллельность и перпендикулярность в пространстве» | 1 |
|  | **Практическое занятие:** Векторы, действия над векторами, угол между векторами, свойства. Координаты вектора | 1 |
|  | Практическое занятие: Вычисление площади поверхности и объема призмы и пирамиды. | 5 |
|  | Практическое занятие: Вычисление площади поверхности и объема тел вращения. | 3 |
|  | **Контрольная работа** по темам «Многогранники. Тела вращения» | 1 |
|  | Практическое занятие: «Степени и корни. Решение иррациональных уравнений» | 3 |
|  | Практическое занятие: «Решение показательных уравнений и неравенств» | 3 |
|  | Практическое занятие: «Преобразование выражений, содержащих логарифмы. Решение логарифмических уравнений и неравенств» | 2 |
|  | **Контрольная работа** по теме «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства» | 1 |
|  | Практические занятия: Решение практических задач с применением вероятностных методов. | 2 |
|  | Практическое занятие: Уравнения, неравенства, их системы. | 4 |
|  | Практическое занятие: Нахождение первообразных. Вычисление интегралов. Вычисление площадей фигур. | 3 |
|  | Контрольная работа | 7 |
|  | Итого | 90 |

**Практическая работа №1-5**

**Повторение курса математики основной школы**

**Темы:**

1. Действия с числовыми выражениями.
2. Тождественные преобразования алгебраических выражений
3. Линейные и квадратные уравнения, системы уравнений.
4. Линейные и квадратные неравенства, системы неравенств

**Занятие №6 .Входная контрольная работа**

**Практическая работа №6**

**Тема: Функции. Свойства функций**

**Цель:** сформировать умение использовать свойства функции для ее исследования, решать задачи и упражнения по данной теме.

**Теоретические сведения к практической работе**

Если каждому элементу х из множества Х по некоторому правилу f поставлен в соответствие элемент у множестваY, то говорят, что на множестве Х определена функция со значениями в множестве Y, и записывают y=f(х).

Множество Х называется областью определения функции D(f), а множество Y – областью значений функции E(f).

*Пример 1*. Найти область определения функции



Основные свойства функции:

1. Четность и нечетность. Функция y=f(x) называется четной, если для любых значений х из области определения f(-x)=f(x), и называется нечетной, если f(-x)=-f(x). В противном случае функция y=f(x) называется функцией общего вида.

*Пример 2*. Установить четность или нечетность функции.



1. Монотонность. Функция y=f(x) называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке Х из области определения, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.
2. Ограниченность. Функция y=f(x) называется ограниченной на некотором промежутке Х из области определения, если существует число М>0, такое, что  для любого .
3. Периодичность. Функция y=f(x) называется периодической с периодом Т>0, если для любых значений х из области определения f(x+T)=f(x-T)=f(x).

Если каждому значению цены p за единицу товара поставлено в соответствие число q – количество товара, которое потребители готовы купить по данной цене за определенный промежуток времени, то говорят, что задана функция спроса, и пишут q=f(p).

Эта функция определена для тех значений , для которых  и множество ее значений .

График функции спроса называют кривой спроса.

*Пример 3*. Функция спроса на некоторый товар имеет вид , где q – количество товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

1. Область определения и множество значений этой функции
2. Функцию цены в виде 
3. Объем спроса при ценах на товар: 
4. Цену за единицу товара, если ,
5. Выручку продавцов в каждом из этих случаев.

Решение: 1) Получим систему неравенств:



Выразим значение p через q:



Из закона спроса следует, что с увеличением цены р от нуля до 3500 руб. спрос должен падать. В нашем случае функция q убывает в промежутке , следовательно, множество значений функции .

1. Функция цены имеет вид 
2. 
3. 
4. Выручка от продажи составляет , следовательно,



Если каждому значению цены p за единицу товара поставлено в соответствие число q – количество товара, которое производители готовы продать по данной цене за определенный промежуток времени, то говорят, что задана функция предложения, и пишут q=φ(p).

Эта функция определена для тех значений , для которых  и множество ее значений .

*Пример 4*. Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид , где q – количество предлагаемого товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

1. Область определения и множество значений функции q
2. Объем предложения при ценах за единицу товара: 
3. Зависимость цены за единицу товара от объема спроса, т.е. функцию 

Решение: 1) Найдем область определения:



Множество значений функции q при  будет .

1. При 
2. Найдем функцию 



**Содержание практической работы:**

**Задание 1.** Найти область определения функции



**Задание 2.** Установить четность или нечетность функции.



**Задание 3.** а) Функция спроса на некоторый товар имеет вид , где q – количество товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

1. Область определения и множество значений этой функции
2. Функцию цены в виде 
3. Объем спроса при ценах на товар: 
4. Цену за единицу товара, если ,
5. Выручку продавцов в каждом из этих случаев.

б) Функция спроса на некоторый товар имеет вид , где q – количество товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

1. Область определения и множество значений этой функции
2. Функцию цены в виде 
3. Объем спроса при ценах на товар: 
4. Цену за единицу товара, если ,
5. Выручку продавцов в каждом из этих случаев.

**Задание 4.** а) Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид , где q – количество предлагаемого товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

1. Область определения и множество значений функции q
2. Объем предложения при ценах за единицу товара: 
3. Зависимость цены за единицу товара от объема спроса, т.е. функцию 

б) Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид , где q – количество предлагаемого товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

1. Область определения и множество значений функции q
2. Объем предложения при ценах за единицу товара: 
3. Зависимость цены за единицу товара от объема спроса, т.е. функцию 

**Практическая работа №7**

Тема: Числовая окружность. Нахождение точек по их координатам на числовой окружности. Определение координат точек окружности

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

1. определения радиана, синуса, косинуса, тангенса и котангенса числового аргумента;
2. значения тригонометрических функций некоторых аргументов;
3. знаки значений тригонометрических функций по координатным четвертям;
4. определение числовой окружности точки числовой окружности
5. Точки числовой окружности
6. Точки числовой окружности

*уметь:*

1. переводить значения углов из радианной меры угла в градусную меру и наоборот;
2. вычислять простейшие тригонометрические выражения.
3. находить криволинейные координаты точки на числовой окружности
4. Определять координаты точек числовой окружности

***Часть 1.***

***Сведения из теории:***

*Радианная мера*

Угол в 1 радиан – это такой центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности.

Радианная и градусная меры связаны между собой зависимостью1800=π радиан; угол в *n*0= радиан.



Значения тригонометрических функций могут быть найдены так, как это делалось в курсе геометрии, из прямоугольного треугольника с гипотенузой равной 1 и по очереди задаваемых углов: 300, 450, 600.

Знаки тригонометрических функций по координатным четвертям:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер координатной четверти | I | II | III | IV |
| sinα | + | + | – | – |
| cosα | + | – | – | + |
| tgα | + | – | + | – |
| ctgα | + | – | + | – |

Единственная четная функция – косинус

*cos(-*α)=*cos*α.

Все остальные основные тригонометрические функции нечетные:

*sin(-*α)= *-sin*α;

*tg(-*α)= *-tg*α;

*сtg(-*α)= *-сtg*α.

Таблица 2. Значения основных тригонометрических функций

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Радианная мера угла | 0 |  |  |  |  |  |  |  | π |
| Градусная мера угла | 00 | 300 | 450 | 600 | 900 | 1200 | 1350 | 1500 | 1800 |
| *sin*α | 0 |  |  |  | 1 |  |  |  | 0 |
| *cos*α | 1 |  |  |  | 0 |  |  |  | -1 |
| *tg*α | 0 |  | 1 |  | – |  | -1 |  | 0 |
| *ctg*α | – |  | 1 |  | 0 |  | -1 |  | – |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Радианная мера угла |  |  |  |  |  |  |  | 2π |
| Градусная мера угла | 2100 | 2250 | 2400 | 2700 | 3000 | 3150 | 3300 | 3600 |
| *sin*α |  |  |  | -1 |  |  |  | 0 |
| *cos*α |  |  |  | 0 |  |  |  | -1 |
| *tg*α |  | 1 |  | – |  | -1 |  | 0 |
| *ctg*α |  | 1 |  | 0 |  | -1 |  | – |

***Пример 30.***

Вычислите: sin4050.

Решение:

полный круг – 3600 можно «отбросить»:

sin4050=sin(4050-3600)=sin450=.

***Пример 31.***

Выразите в радианной мере значение угла 360.

Решение:

чтобы «перевести» градусную меру угла в радианную, необходимо заданное значение умножить на , т.о. получим

360=

***Пример 32.***

Выразите в градусной мере значение угла .

Решение:

чтобы «перевести» радианную меру угла в градусную, необходимо заданное значение умножить на , т. о. получим



***Задания для самостоятельного решения:***

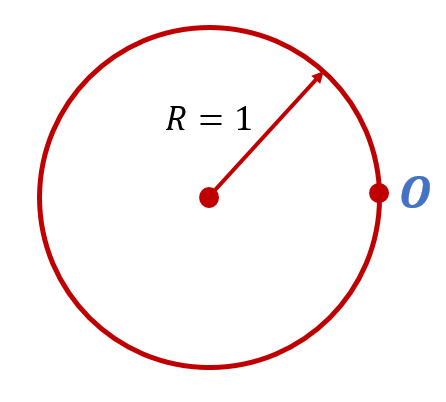
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1 вариант**  №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 600; .  №2.Вычислите: | **2 вариант**  №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 1800; .  №2.Вычислите: | **3 вариант**  №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 2700; .  №2.Вычислите: |
| **4 вариант**  №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 1200; .  №2.Вычислите: | **5 вариант**  №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 3100; .  №2.Вычислите: | **6 вариант**  №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 3600; .  №2.Вычислите: |
| **7 вариант**  №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 15000; .  №2.Вычислите: | **8 вариант**  №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 2160; .  №2.Вычислите: | **9 вариант**  №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 900; .  №2.Вычислите: |

***Контрольные вопросы:***

* Что называется углом в 1 радиан?
* В каких единицах измеряются углы?
* Перечислите значения некоторых тригонометрических функций.

***Часть 2. Сведения из теории:***

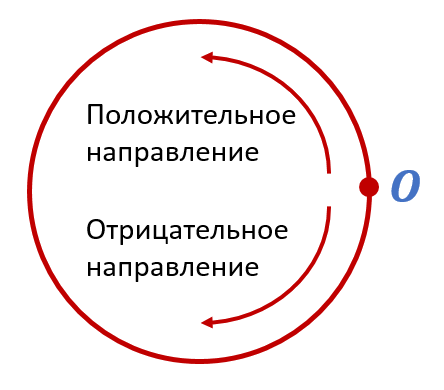
Нарисуем окружность, радиус которой равен 1. Самую «правую» точку этой окружности обозначим буквой O:



Поскольку радиус этой окружности равен 1, то её длина равна .

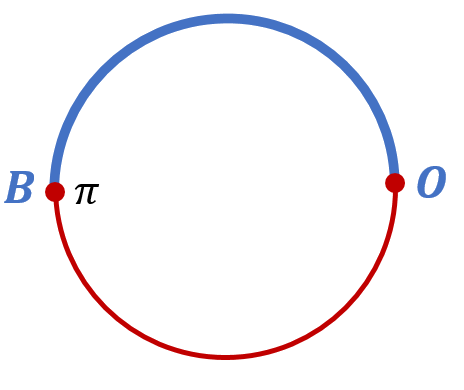


Каждому действительному числу можно поставить в соответствие длину траектории вдоль числовой окружности от точки O. За положительное направление принимается направление движения против часовой стрелки. За отрицательное – по часовой стрелке:



## Расположение точек на числовой окружности

Как мы уже отмечали, длина числовой окружности (единичной окружности) равна . Где тогда будет располагаться на этой окружности число ? Очевидно, от точки O против часовой стрелки нужно пройти половину длины окружности, и мы окажемся в нужной точке. Обозначим её буквой B:



Обратите внимание, что в ту же точку можно было бы попасть, пройдя полуокружность в отрицательном направлении. Тогда бы мы отложили на единичной окружности число . То есть числам  и  соответствует одна и та же точка.

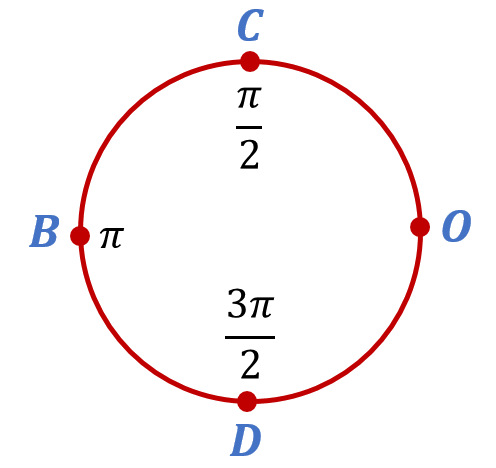


Причём этой же точке соответствуют также числа , , ,  и, вообще, бесконечное множество чисел, которые можно записать в виде , где , то есть принадлежит множеству целых чисел. Всё это потому, что из точки B можно совершить «кругосветное» путешествие в любую сторону (добавить или вычесть длину окружности ) и попасть в ту же самую точку. Получаем важный вывод, который нужно понять и запомнить.



Каждому числу соответствует единственная точка на числовой окружности. Но каждой точке на числовой окружности соответствует бесконечно много чисел.

Разобьем теперь верхнюю полуокружность числовой окружности на дуги равной длины точкой C. Легко видеть, что длина дуги OC равна . Отложим теперь от точки C дугу той же длины в направлении против часовой стрелки. В результате попадём в точку B. Результат вполне ожидаемый, поскольку . Отложим эту дугу в том же направлении ещё раз, но теперь уже от точки B. В результате попадём в точку D, которая будет уже соответствовать числу :



Заметим опять, что эта точка соответствует не только числу , но и, например, числу , потому что в эту точку можно попасть, отложив от точки O четверть окружности в направлении движения часовой стрелки (в отрицательном направлении).



И, вообще, отметим снова, что этой точке соответствует бесконечно много чисел, которые можно записать в виде . Но их также можно записать в виде . Или, если хотите, в виде . Все эти записи абсолютно равнозначны, и они могут быть получены одна из другой.



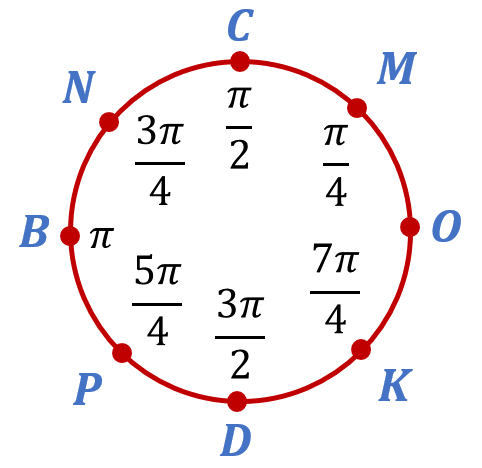
Разобьём теперь дугу на OC пополам точкой M. Сообразите теперь, чему равна длина дуги OM? Правильно, вдвое меньше дуги OC. То есть . Каким числам соответствует точка M на числовой окружности? Уверен, что теперь вы сообразите, что эти числа можно записать в виде .



Но можно и иначе. Давайте в представленной формуле возьмём . Тогда получим, что . То есть эти числа можно записать в виде . Этот же результат можно было получить, используя числовую окружность. Как я уже говорил, оба записи равнозначны, и они могут быть получены одна из другой.



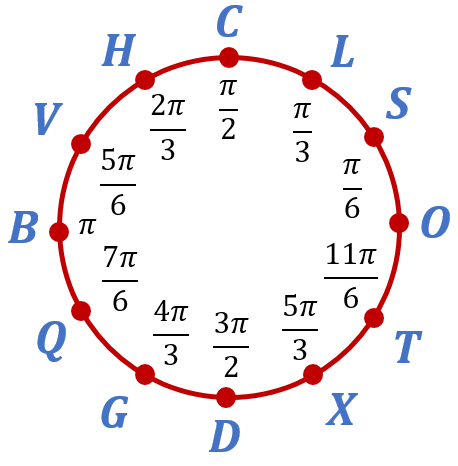
Теперь вы легко можете привести пример чисел, которым соответствуют точки N, P и K на числовой окружности. Например, числам ,  и :



Часто именно минимальные положительные числа и берут для обозначения соответствующих точек на числовой окружности. Хотя это совсем не обязательно, и точке N, как вы уже знаете, соответствует бесконечное множество других чисел. В том числе, например, число .



Если разбить дугу OC на три равные дуги точками S и L, так что точка S будет лежать между точками O и L, то длина дуги OS будет равна , а длина дуги OL будет равна . Используя знания, которые вы получили в предыдущей части урока, вы без труда сообразите, как получились остальные точки на числовой окружности:

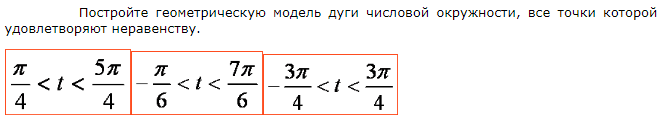


**Задание:**

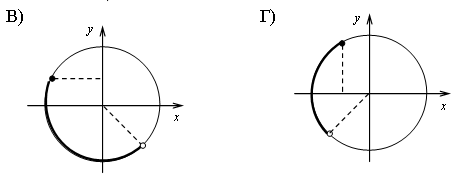
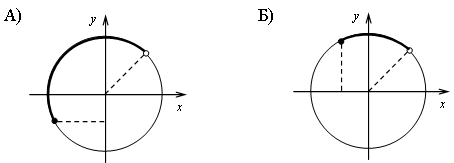
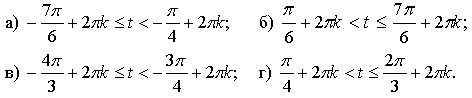
1. Обозначьте на числовой окружности точку, которая соответствует данному числу:



1. Какой четверти числовой окружности принадлежит точка, соответствующая числу: 2; 5; -5; -9; -17; 31; -95.?



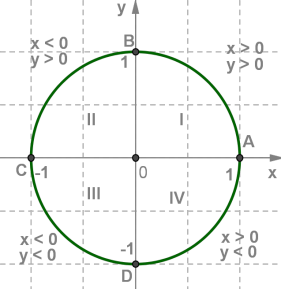
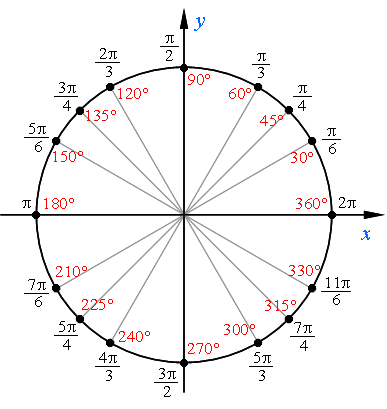
1. Сопоставьте дугу на окружности и её аналитическую запись.



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| а | б | в | г |
|  |  |  |  |

***Часть 3***

***Сведения из теории:***



**Самостоятельная работа.**

**Вариант 1**

1. Обозначьте на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу, и найдите её декартовы координаты:



2. Найдите на числовой окружности точки с данной абсциссой  и запишите, каким числам *t* они соответствуют.

3. Обозначьте на числовой окружности точки с ординатой, удовлетворяющей неравенству  и запишите при помощи двойного неравенства, каким числам *t* они соответствуют.

**Вариант 2**

1. Обозначьте на числовой окружности точку, которая соответствует данному числу, и найдите её декартовы координаты:



2. Найдите на числовой окружности точки с данной ординатой *у* = 0,5 и запишите, каким числам *t* они соответствуют.

3. Обозначьте на числовой окружности точки с абсциссой, удовлетворяющей неравенству  и запишите при помощи двойного неравенства, каким числам *t* они соответствуют.

***Ответьте на вопросы:***

– Как найти на окружности точку, абсцисса которой удовлетворяет заданному уравнению?

– Как найти на окружности точку, ордината которой удовлетворяет заданному уравнению?

– Назовите алгоритм решения неравенств с помощью числовой окружности.

**Практическая работа №8** «Преобразования графиков тригонометрических функций»

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

* графики элементарных функций;
* формулы преобразования графиков;

*уметь:*

* выполнять построение графиков функций с помощью параллельного переноса, растяжения, сжатия.

***Сведения из теории:***

*Растяжение вдоль оси* О*у* с коэффициентом *k*, которое задается формулами:

.

Для построения графика функции *y*=*kf(х)* надо «растянуть» график функции *y*=*f(х)* в *k* раз вдоль оси ординат (|*k*|>1).

Если 0<|*k*|<1, то растяжение с коэффициентом *k* называют сжатием.

***Пример 1***

Построить графики функций: а) *у*=*cos* *x*; б) *у*=-2*х*2.



Решение:

а) в соответствии с правилом график функции *у*=*cos* *x* получается из *у*=*cos* *x* сжатием вдоль оси ординат с коэффициентом 3;



б) график функции *у*=-2*х*2 получается из *у*=*х*2 растяжением вдоль оси ординат с коэффициентом 2.

*Растяжение вдоль оси* О*х* с коэффициентом *k*, которое задается формулами:

.



Для построения графика функции *y*=*f(х/k)* надо подвергнуть график функции *y*=*f(х)* растяжению с коэффициентом *k* вдоль оси абсцисс.

***Пример 2.***

Построить графики функций: а) *у*=*sin*(*x/3*); б) *у*=*cos*(2*х*).

Решение:

а) в соответствии с правилом график функции *у*=*sin*(*x/3*) получается из *у*=*sin x* растяжением вдоль оси О*х* с коэффициентом 3;

б) график функции *у*=*cos*(2*х*)получается из *у*=*cos х* сжатием вдоль оси О*х* с коэффициентом 2.

***Задания для самостоятельного решения:***

Построить в одной системе координат графики функций (записать цепочку движения):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1 вариант**  ,  ,  . | **2 вариант**  ,  ,  . | **3 вариант**  ,  ,  . |
| **4 вариант**  ,  ,  . | **5 вариант**  ,  ,  . | **6 вариант**  ,  ,  . |
| **7 вариант**  ,  ,  . | **8 вариант**  ,  ,  . | **9 вариант**  ,  ,  . |

***Контрольные вопросы:***

1. Какими формулами задается растяжение (сжатие)?

**Практическая работа №9** «Формулы приведения»

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

основные тригонометрические тождества;

формулы приведения;

*уметь:*

выполнять преобразования тригонометрических выражений, используя основные тригонометрические тождества, формулы приведения.

***Сведения из теории:***

*Основные формулы тригонометрии*

Из определений синуса, косинуса, тангенса и котангенса следуют *основные тригонометрические тождества*:

sin2α+cos2α=1;



tgα∙ctgα=1;



Основой для остальных формул являются *формулы сложения*:

cos(α-β)=cosαcosβ+sinαsinβ;

cos(α+β)=cosαcosβ-sinαsinβ;

sin(α-β)=sinαcosβ-cosαsinβ;

sin(α+β)=sinαcosβ+cosαsinβ;



Из формул сложения, полагая , где *n* Є ***Z***, получаем *формулы приведения* преобразования выражений вида:

sin, cos, tg, ctg, *n* Є ***Z***.



Для запоминания этих формул удобно пользоваться мнемоническим правилом:

1. Перед приведенной функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция в соответствующей координатной четверти:

2. Функция меняется на «кофункцию», если *n* нечетно; функция не меняется, если *n* четно. (Кофункциями синуса, косинуса, тангенса и котангенса называются соответственно косинус, синус, котангенс, тангенс).

***Пример 1***

Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: 0,4 и 0,7.

Решение:

используя основное тригонометрическое тождество sin2α+cos2α=1, имеем:

0,42+0,72=0,16+0,49=0,65.

Т.к. 0,65≠1 значения синуса и косинуса одного и того же числа не могут быть равными соответственно: 0,4 и 0,7.

***Пример 2***

Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: sinα=-0,8 и π<α<1,5π.

Решение:

используя основное тригонометрическое тождество sin2α+cos2α=1, имеем:

cos2α=1-sin2α, тогда cos2α=1-(-0,8)2=1-0,64=0,36.

Т. к. π<α<1,5π (III координатная четверть), то cosα=-0,6.

По формуле  вычисляем 

По формуле tgα∙ctgα=1 вычисляем ctgα=1׃=.

***Задания для самостоятельного решения:***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1 вариант**  1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: 0,5 и 0,5.  2)Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если:  cosα= и . | **2 вариант**  1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: 0,2 и -0,8.  2)Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если:  sinα= и . | **3 вариант**  1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: 0,6 и -0,8.  2)Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если:  cosα= и . |
| **4 вариант**  1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно:  и .  2)Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если:  sinα=0,5 и . | **5 вариант**  1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно:  и .  2)Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если:  cosα=0,4 и . | **6 вариант**  1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно:  и .  2)Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если:  sinα= и . |
| **7 вариант**  1) Могут ли тангенс и котангенс одного и того же числа быть равными соответственно:  и .  2)Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если:  cosα= и . | **8 вариант**  1) Могут ли тангенс и котангенс одного и того же числа быть равными соответственно: 2,4 и .  2)Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если:  sinα=0,7 и . | **9 вариант**  1) Могут ли тангенс и котангенс одного и того же числа быть равными соответственно:  и .  2)Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если:  cosα=0,9 и . |

***Контрольные вопросы:***

* Перечислите основные тригонометрические тождества.
* Сформулируйте мнемоническое правило.

**Практическая работа №12** «Решение простейших тригонометрических уравнений»

*студент должен:*

*знать:*

формулы для решения тригонометрических уравнений в общем виде и частные случаи решения;

*уметь:*

решать простейшие тригонометрические уравнения.

**Задание**

**1**. С помощью тригонометрической окружности найти все точки на числовой окружности из промежутка [-2 которые соответствуют числам



 ,  , , , arcsin 0, arcsin



**2.** С какой из отмеченных на числовой окружности точек совпадает точка:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1) 0 2) 3)  4) |  |
|  | 1)  2)  3)  4) |  |
|  | 1) 0 2)  3)  4) |  |
|  | 1) 0 2)  3)  4) |  |

**Задание**

Вы Решите предложенные уравнения ( записать ответ на карточке).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Вариант 1** | | **Вариант 2** | |
|  |  |  |  |
| *cos x* = - 1 |  | *cos x* = 0 |  |
|  |  |  |  |
| *sin x* = 0 |  | *sin x* = - 1 |  |
| tg x = - 1 |  | tg x = 1 |  |

Проверить ответы с помощью таблицы.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Вариант 1** | | **Вариант 2** | |
|  |  |  |  |
| *cos x* = - 1 |  | *cos x* = 0 |  |
|  |  |  |  |
| *sin x* = 0 |  | *sin x* = - 1 |  |
| tg x = - 1 |  | tg x = 1 |  |

***Сведения из теории:***

*Решение простейших тригонометрических уравнений*

*Уравнение cos t=a*

Очевидно, что если |*а*|>1, то уравнение *cos* *t*=*a* не имеет решений, т.к. |*cos* *t*|≤1 для любого *t*.

Пусть |*а*|≤1. Надо найти все такие числа *t*, что *cos* *t*=*a*. На отрезке [0; π] существует только одно решение уравнения *cos* *t*=*a* – это число *arсcos a*.

Косинус – четная функция, и, значит на отрезке [-π; 0] уравнение также имеет единственное решение – это число –*arсcos a*.

Итак, уравнение *cos* *t*=*a* на отрезке [-π; π] длиной 2π имеет два решения *t*=±*arсcos a* (совпадающие при *а*=1).

Вследствие периодичности функции косинус все остальные решения отличаются от найденных на 2π*n*, (*n*Є***Z***), т.е. формула корней уравнения *cos* *t*=*a* имеет вид:

*t*=±*arсcos a*+2π*n*, (*n* Є ***Z***).

***Пример 40.***

Решите уравнение: *cos* *t*=1/2.

Решение:

по формуле *t*=±*arсcos* (1/2)+2π*n*, (*n* Є ***Z***).

Поскольку *arсcos* (1/2)=π/3 приходим к ответу *t*=± π/3+2π*n*, (*n* Є ***Z***).

***Пример 41.***

Решите уравнение: *cos* *t*=-0,2756.

Решение:

по формуле *t*=±*arсcos* (-0,2756)+2π*n*, (*n* Є ***Z***).

Значение *arсcos* (-0,2756) находим с помощью калькулятора или по таблице В.М. Брадиса, оно примерно равно 1,85.

Итак, приходим к ответу *t*=±1,85+2π*n*, (*n* Є ***Z***).

***Пример 42.***

Решите уравнение: *cos* (2*х*-π/4)=1/2.

Решение:

по формуле

2*х*-π/4=±*arсcos* (1/2)+2π*n*, (*n* Є ***Z***).

Поскольку *arсcos* (1/2)=π/3 получаем

2*х*-π/4=± π/3+2π*n*, (*n* Є ***Z***)

2*х*=π/4± π/3+2π*n*, (*n* Є ***Z***).

Разделив обе части уравнения на 2 получим ответ: *х*=π/8±π/6+π*n*, (*n*Є***Z***).

*Уравнение sin t=a*

Очевидно, что если |*а*|>1, то уравнение *sin* *t*=*a* не имеет решений, т.к. |*sin* *t*|≤1 для любого *t*.

При |*а*|≤1 на отрезке [-π/2; π/2] уравнение *sin* *t*=*a* имеет одно решение *t*1=*arcsin* *a*. На отрезке [π/2; 3π/2] функция синус убывает и принимает все значения от -1 до 1. По теореме о корне уравнение и на этом отрезке имеет одно решение.

Это решение есть число *t*2=π-*arcsin* *a*, т.к. *sin* *t*2=*sin* (π-*t*1)=*sin* *t*1=*а*.

Кроме того, поскольку -π/2≤ *t*1≤π/2,

имеем -π/2≤-*t*1≤π/2

и π-π/2≤π-*t*1≤π+π/2,

т.е. π/2≤ *t*2≤3π/2, *t*2Є[π/2; 3π/2].

Итак, уравнение *sin* *t*=*a* на отрезке [π/2; 3π/2] имеет два решения *t*1=*arcsin* *a* и *t*2=π-*arcsin* *a* ( совпадающие при *а*=1). Учитывая, что период синуса равен 2π, получаем формулу для решения уравнения *sin* *t*=*a*:

*t*=(-1)*karcsin* *a*+π*k*, *k*Є***Z***.

***Пример 1***

Решите уравнение: *sin* *t*=.



Решение:

по формуле *t*=(-1)*karсsin*()+π*k*, (*k* Є ***Z***).

Поскольку *arсsin* ()=π/4 приходим к ответу *t*=(-1)*k* π/4+π*k*, (*k* Є ***Z***).

***Пример 2***

Решите уравнение: *sin* *t*=0,3714.

Решение:

по формуле *t*=(-1)*karсsin* (0,3714)+π*k*, (*k* Є ***Z***).

Значение *arсsin* (0,3714) находим с помощью калькулятора или по таблице В.М. Брадиса, оно примерно равно 0,3805.

Итак, приходим *t*= (-1)*k*0,3805+π*k*, (*k* Є ***Z***).

***Пример 3***

Решите уравнение: *sin* =.

Решение:

функция синус нечетная, поэтому *sin*=-*sin*=-.

Тогда по формуле: =(-1)*karсsin*+π*k*, (*k* Є ***Z***).

Т.к. *arсsin*=, имеем

=(-1)*k*()+π*k*, (*k* Є ***Z***)

или

, (*k* Є ***Z***).



Умножив обе части уравнения на 2, получим ответ:

, (*k* Є ***Z***).

*Уравнение tg x=a*

При любом *а* на интервале (-π/2; π/2) существует одно число *t* , что *tgt*=*a*, – это *arctg* *a*. Поэтому уравнение *tg x=a* имеет на интервале (-π/2; π/2) длиной π единственный корень.

Функция тангенс имеет период π. Следовательно, остальные корни уравнения *tg* *t*=*a* отличаются от найденного на π*n*, (*n* Є ***Z***), т.е.

*t*=*arctg* *a*+π*n*, (*n* Є ***Z***).

***Пример 4***

Решите уравнение: *tg* *t*=.

Решение:

по формуле *t*=*arсtg*()+π*n*, (*n* Є ***Z***).

Поскольку *arсtg*()= приходим к ответу *t*=+π*n*, (*n* Є ***Z***).

***Пример 5***

Решите уравнение: *tg* *t*=5,177.

Решение:

по формуле *t*=*arсtg*(5,177)+π*n*, (*n* Є ***Z***).

Значение *arсtg*(5,177) находим с помощью калькулятора или по таблице В.М. Брадиса, оно примерно равно 1,38.

Итак, приходим *t*=1,38+π*n*, (*n* Є ***Z***).

*Сводная таблица решения простейших тригонометрических уравнений*

|  |  |
| --- | --- |
| Уравнение | Решение |
|
| sin*x*=*a* |  |
| cos*x*=*a* |  |
| tg*x*=*a* |  |
| ctg*x*=*a* |  |

### *Частные случаи решения простейших тригонометрических уравнений*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Уравнение | Частные случаи | | |
| *а*=-1 | *а*=0 | *а*=1 |
| sin*x*=*a* |  |  |  |
| cos*x*=*a* |  |  |  |
| tg*x*=*a* |  |  |  |
| ctg*x*=*a* |  |  |  |

***Задания для самостоятельного решения:***

Решите уравнения:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1 вариант**  1) ;  2) ;  3) . | **2 вариант**  1) ;  2) ;  3) . | **3 вариант**  1) ;  2) ;  3) . |
| **4 вариант**  1) ;  2) ;  3) . | **5 вариант**  1) ;  2) ;  3) . | **6 вариант**  1) ;  2) ;  3) . |
| **7 вариант**  1) ;  2) ;  3) . | **8 вариант**  1) ;  2) ;  3) . | **9 вариант**  1) ;  2) ;  3) . |

***Контрольные вопросы:***

1. Перечислите формулы для решения простейших тригонометрических уравнений в общем виде.
2. Перечислите формулы частных случаев решения простейших тригонометрических уравнений.

**Практическая работа №13** «Решение тригонометрических неравенств»

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

формулы для решения простейших тригонометрических неравенств;

*уметь:*

решать простейшие тригонометрические неравенства.

***Сведения из теории:***

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства

sin *x*<*m*, sin *x*>*m*, cos *x*<*m*, cos *x*>*m*, tg *x*<*m*, tg *x*>*m*, ctg *x*<*m*, ctg *x*>*m*, где *m* – данное число.

Решить простейшее тригонометрическое неравенство – значит найти множество всех значений аргумента, которые обращают данное неравенство в верное числовое неравенство.

***Пример 48.***

Решить неравенство: 1) sin *x*>**; 2) cos *x*>**.

Решение:

1) решение иллюстрируется рисунком 1 слева: здесь точке *М*1 соответствует угол , *М*2 – угол , *М*3 – угол , *М*4 – угол .

Неравенство выполняется для <*x*< и <*х*<. Общим решением служит неравенство:

<*х*<, *k*Є***Z***.

2) Данное неравенство иллюстрируется рисунком 1 справа: здесь точке *М*1 соответствует угол , *М*2 – угол . Общим решением неравенства является

<*х*<, *k*Є***Z***.

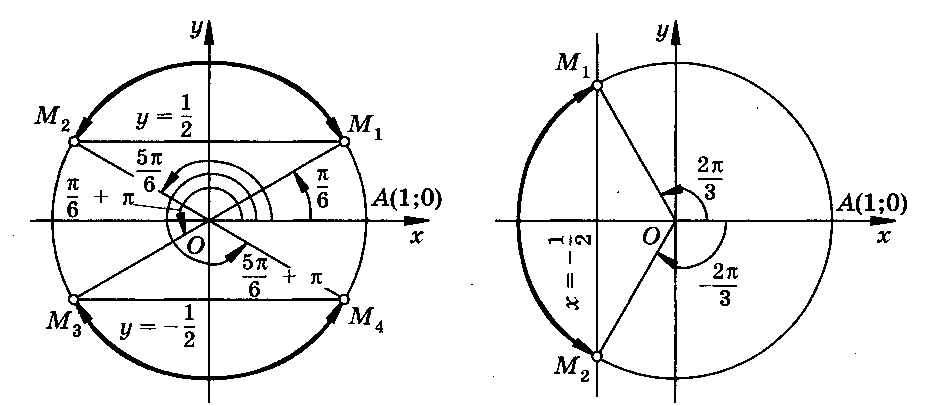


Рисунок 1. Решение тригонометрического неравенства.

***Задания для самостоятельного решения:***

Решить неравенство:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1 вариант**  1) ;  2) ;  3) . | **2 вариант**  1) ;  2) ;  3) . | **3 вариант**  1) ;  2) ;  3) . |
| **4 вариант**  1) ;  2) ;  3) . | **5 вариант**  1) ;  2) ;  3) . | **6 вариант**  1) ;  2) ;  3) . |
| **7 вариант**  1) ;  2) ;  3) . | **8 вариант**  1) ;  2) ;  3) . | **9 вариант**  1) ;  2) ;  3) . |

***Контрольные вопросы:***

* Что называется простейшими тригонометрическими неравенствами?
* Проиллюстрируйте решение неравенства sin *x*>*m* на окружности.

**Практическая работа №15**«Преобразование простейших тригонометрических выражений»

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

формулыпреобразования суммы тригонометрических функций в произведение;

формулыпреобразования произведения тригонометрических функций в сумму;

*уметь:*

выполнять преобразования тригонометрических выражений, используя тригонометрические тождества.

***Сведения из теории:***

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:







Для преобразования произведения тригонометрических функций в сумму применяются формулы:



***Пример 1***

Преобразуйте в алгебраическую сумму sin5*x*sin3*x*.

Решение:

по формуле  имеем



***Пример 2***

Вычислите: sin400*+*sin200.

Решение:

по формуле  имеем



***Задания для самостоятельного решения:***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1 вариант**  1) Упростите:  .  2) Вычислите:  sin750*+*sin150.  3) Вычислите:  *sin*52030’·*cos*7030’. | **2 вариант**  1) Упростите:  .  2) Вычислите:  sin750*+*sin1050.  3) Вычислите:  *sin*37030’·*sin*7030’. | **3 вариант**  1) Упростите:  .  2) Вычислите:  соs750*+*соs150.  3) Вычислите:  8 *cos*7α·*cos*3α. |
| **4 вариант**  1) Упростите:  .  2) Вычислите:    3) Вычислите:  *cos*750·*cos*1050. | **5 вариант**  1) Упростите:  .  2) Вычислите:    3) Вычислите:  2 *sin*(*x*+α)·*cos*(*x*-α). | **6 вариант**  1) Упростите:  .  2) Вычислите:    3) Вычислите:  12 *sin*(-9α)·*sin*4α. |
| **7 вариант**  1) Упростите: .  2) Вычислите:  *tg*22030’-*tg*67030’.  3) Вычислите:  4 *sin*16α·*sin*4α. | **8 вариант**  1) Упростите: .  2) Вычислите:  *tg*13030’+*tg*76030’.  3) Вычислите:  4 *cos*(*α*+*β*)·*cos*(*α*-*β*). | **9 вариант**  1) Упростите:  .  2) Вычислите:  *tg*300+*tg*600.  3) Вычислите:  4 *cos*150*sin*200*sin*400. |

***Контрольные вопросы:***

1. Перечислите основные тригонометрические тождества.
2. Перечислите формулы двойного угла тригонометрических функций.
3. Какие есть формулы для преобразования суммы тригонометрических функций?

**Практическая работа №14** «Применение аксиом стереометрии и их следствий»

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

- аксиомы стереометрии;

- следствия их аксиом

*уметь:*

решать задачи

***Сведения из теории:***

Основные фигуры в пространстве: точки, прямые и плоскости.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| рис. 1 | рис. 2 | рис. 3 |

Основные свойства точек, прямых и плоскостей, касающиеся их взаимного расположения, выражены в аксиомах.  
  
**А1.** Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

|  |  |
| --- | --- |
|  | А В       (точки А, В, С лежат в плоскости ) С |
| рис. 4 |  |

**А2.** Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости

|  |  |
| --- | --- |
|  | АB  Прямая АВ лежит в плоскости |
| рис. 5 |  |

**Замечание.** Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что они пересекаются.

|  |  |
| --- | --- |
|  | а   = М Прямая а и плоскость  пересекаются в точке М. |
| рис. 6 |  |

**А3.** Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

|  |  |
| --- | --- |
|  | = a  и  пересекаются по прямой а. |
| рис. 7 |  |

**Следствие 1.** Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.  
  
**Следствие 2.** Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

**Ответьте на вопросы теста:**

**Вариант 1**

|  |  |
| --- | --- |
| 1 | Точка Р лежит на прямой МN. Назовите плоскость, которой принадлежит точка Р.  1) АВС 2) DBC 3) DAB 4) DAC |
| 2 | Каким плоскостям принадлежит точка К?  1) АВС и ABD  2) ABD и BCD  3) ACD и ABD  4) ABC и BCD |
| 3 | Выберите **верные** высказывания:  1) Любые три точки лежат в одной плоскости.  2) Если центр окружности и ее точка лежат в плоскости, то и вся окружность лежит в этой плоскости.  3) Через три точки, лежащих на прямой, проходит только одна плоскость.  4) Через две пересекающихся прямые проходит плоскость , и притом только одна.  Ответ: \_\_\_\_\_\_ |
| 4 | Выберите **неверные** высказывания:  1) Если три прямые имеют общую точку, то они лежат в одной плоскости.  2) Прямая, пересекающая две стороны треугольника, лежит в плоскости этого треугольника.  3) Две плоскости могут имеет только две общие точки.  4) Три попарно пересекающиеся в разных точках прямые, лежат в одной плоскости.  Ответ: \_\_\_\_\_\_ |
| 5 | Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости A1BCи A1AD.  1) DC 2) A1D1  3) D1D 4) D1C |
| 6 | Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости DCC1 и A1AD.  1) DC 2) A1D1  3) D1D 4) D1C |
| 7 | Прямые АВ и CD пересекаются. Через прямую АВ проведена плоскость. Назовите линию пересечения данной плоскости с плоскостью ВСD.  1) АС 2) АB 3) BС 4) ВD |
| 8 | Прямые АВ и CD пересекаются. Через точки В и D проведена плоскость. Назовите линию пересечения данной плоскости с плоскостью AСD.  1) АС 2) АB 3) BС 4) ВD |

**Вариант 2**

|  |  |
| --- | --- |
| 1 | Точка Р лежит на прямой МN. Назовите плоскость, которой принадлежит точка Р.  1) АВС 2) DBC 3) DAB 4) DAC |
| 2 | Каким плоскостям принадлежит точка F?  1) АВС и ACD  2) ABD и BCD  3) ACD и BCD  4) ABC и BCD |
| 3 | Выберите **верные** высказывания:  1) Любые четыре точки лежат в одной плоскости.  2) Через прямую и не лежащую на ней точку проходит только одна плоскость.  3) Если три точки окружности лежат в плоскости, то и вся окружность лежит в этой плоскости .  4) Две плоскости могут иметь только одну общую точку.  Ответ: \_\_\_\_\_\_ |
| 4 | Выберите **неверные** высказывания:  1) Две окружности, имеющие общий центр, лежат в одной плоскости .  2) Прямая, проходящая через вершину треугольника, лежит в плоскости этого треугольника.  3) Три вершины треугольника принадлежат одной плоскости.  4) Через две параллельные прямые проходит плоскость , и притом только одна.  Ответ: \_\_\_\_\_\_ |
| 5 | Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости DCC1 и A1BC.  1) DC 2) A1D1  3) D1D 4) D1C |
| 6 | Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости ABCи C1CB.  1) BC 2) B1C1  3) A1B 4) B1B |
| 7 | Прямые АВ и CD пересекаются. Через прямую CD проведена плоскость. Назовите линию пересечения данной плоскости с плоскостью AВС.  1) СD 2) АD 3) BС 4) ВD |
| 8 | Прямые АВ и CD пересекаются. Через точки A и D проведена плоскость. Назовите линию пересечения данной плоскости с плоскостью BСD.  1) АС 2) АD 3) BС 4) ВD |

**Практическая работа №15** «Решение задач на нахождение углов между прямыми в пространстве»

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

- взаимное расположение прямых в пространстве

*уметь:*

находить углы между прямыми

***Сведения из теории:***

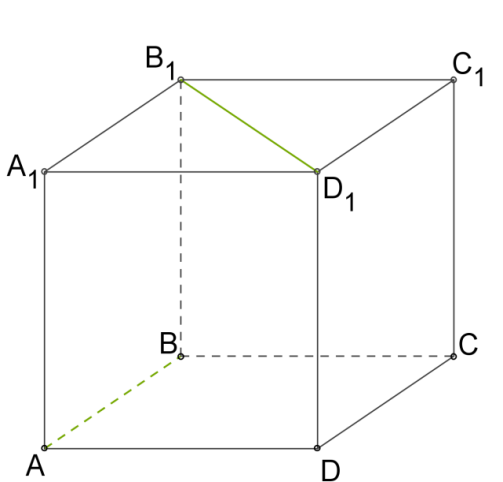
Две прямые в плоскости могут пересекаться (имеют общую точку) или быть параллельными (не имеют общую точку).   
В пространстве мы можем представить ситуацию, когда две прямые не пересекаются, но они и не параллельны.- скрещиваются.

**Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.**

1. Если прямые параллельны, то угол между ними 00.  
2. Углом между двумя пересекающимися прямыми называют  величину меньшего из углов, образованных этими прямыми. Если все углы равны, то эти прямые перпендикулярны (образуют угол 900).  
3. Углом между двумя скрещивающимися прямыми называют угол между двумя пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимися прямым.

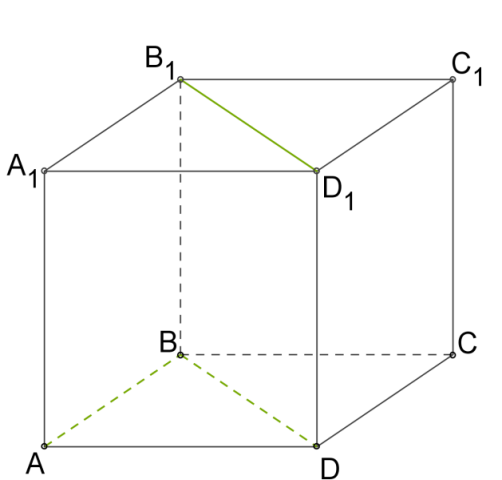
*Пример:*

*Дан куб*ABCDA1B1C1D1



*Найти угол между*AB*и*B1D1

*Выберем точку*B*на прямой*AB*и проведём через*B*прямую*BD*параллельно*B1D1

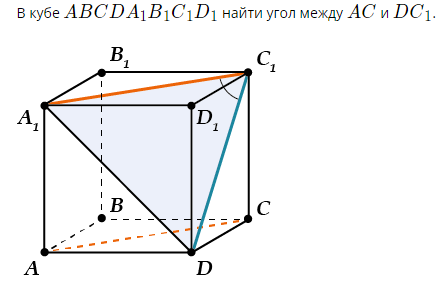


*Угол между*AB*и*BD450*так как*ABCD*квадрат.*

*Соотвeтственно угол между*AB*и*B1D1*тоже*450

При решении задач на **нахождение угла между** скрещивающимися **прямыми**удобно пользоваться таким алгоритмом: 1. Провести прямую, параллельную одной из двух скрещивающихся прямых так, чтобы она пересекала вторую прямую. Мы получим пересекающиеся прямые, **угол между** которыми равен**углу между** исходными скрещивающимися.

**Выполнить самостоятельно:**



**Практическая работа №23**«Решение задач на взаимное расположение прямых и плоскостей»

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

- признаки параллельности прямой и плоскости;

- признаки параллельности плоскостей;

- признаки параллельности прямых в пространстве;

*уметь:*

-строить параллельные прямые, плоскости в пространстве.

***Сведения из теории:***

*Признаки параллельности прямой и плоскости*

1) Если прямая, лежащая вне плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.

2) Если прямая и плоскость перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

*Признаки параллельности плоскостей*

1) Если две пересекающиеся прямые одной плоскости cоответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

2) Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

*Признаки параллельности прямых в пространстве*

1) Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.

2) Если в одной из пересекающихся плоскостей лежит прямая, параллельная другой плоскости, то она параллельна линии пересечения плоскостей.

*Параллельные прямые*

Возьмём, например, две такие прямые *АВ* и *DЕ*, из которых одна пересекает некоторую плоскость *Р*, а другая лежит на ней, но не проходит через точку (*С*) пересечения первой прямой и плоскости Р.

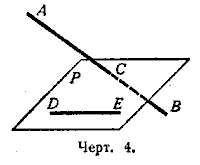


Рисунок Непересекающиеся прямые

Через такие две прямые нельзя провести плоскость, потому что в противном случае через прямую и точку *С* проходили бы две различные плоскости: одна *Р*, пересекающая прямую *АВ*, и другая, содержащая её, а это невозможно.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, конечно, не пересекаются, сколько бы их ни продолжали; однако их не называют параллельными.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются *скрещивающимися*.

*Прямая и плоскость параллельные между собой*

Плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, называются параллельными, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Если прямая (*АВ*) параллельна какой-нибудь прямой (*СD*), расположенной в плоскости (*Р*), то она параллельна самой плоскости.

Если плоскость (*R*) проходит через прямую (*АВ*), параллельную другой плоскости (*Р*), и пересекает эту плоскость, то линия пересечения (*СD*) параллельна первой прямой (*АВ*).

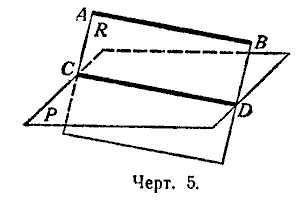


Рисунок Прямая и плоскость параллельные между собой

Если прямая (*АВ*) параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей (*Р* и *Q*), то она параллельна линии их пересечения (*СD*).

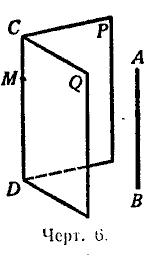


Рисунок Параллельность прямой линии пересечения плоскостей

Если две прямые (*АВ* и *СD*) параллельны третьей прямой (*ЕF*), то они параллельны между собой.

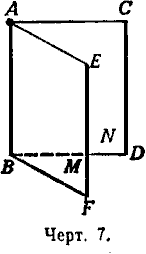


Рисунок Параллельность трех прямых

*Параллельные плоскости*

Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Если две пересекающиеся прямые (*АВ* и *АС*) одной плоскости (*Р*) соответственно параллельны двум прямым (*А*1*В*1 и *А*1*С*1) другой плоскости(*Q*), то эти плоскости параллельны. Прямые *АВ* и *АС* параллельны плоскости *Q*.

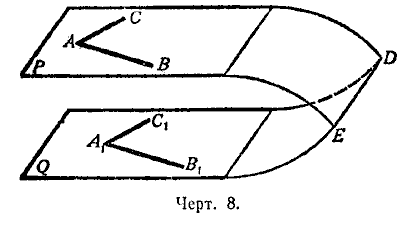


Рисунок 37. Параллельные плоскости

***Задания для самостоятельного решения:***

Решите следующие задачи (выполнить чертеж, дать подробные пояснения):

1) Сторона *АС* треугольника *АВС* параллельна плоскости *a*, а стороны *АВ* и *ВС* пересекаются с этой плоскостью в точках *М* и *N*. Докажите, что треугольники *АВС* и *МВN* подобны.

2) Сколько существует плоскостей, проходящих через данные прямую и точку в пространстве?

3) В пространстве даны прямая *a* и точка *M*. Сколько существует прямых, проходящих через *M* и параллельных прямой *a*?

4) Даны плоскость и точка *M* вне плоскости. Сколько существует прямых, проходящих через *M* и параллельных плоскости?

5) В пространстве даны две параллельные прямые *a* и *b*. Сколько существует плоскостей, проходящих через прямую *a* и параллельных прямой *b*?

6) Даны две скрещивающиеся прямые *a* и *b*. Сколько существует пар параллельных плоскостей, одна из которых проходит через *a*, а другая – через *b*?

7) В пространстве даны две пересекающиеся прямые *a*, *b* и не лежащая на них точка *M*. Сколько существует плоскостей, проходящих через *M* и параллельных прямым *a* и *b*?

***Контрольные вопросы:***

1. Сформулируйте признаки параллельности прямой и плоскости.
2. Сформулируйте признаки параллельности плоскостей.
3. Сформулируйте признаки параллельности прямых в пространстве.

**Практическая работа №24** «Решение задач на перпендикулярность прямой и плоскости»

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

определение перпендикулярных прямой и плоскости

признак перпендикулярности

*уметь:*

*решать задачи*

**Немного теории**

**Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.**

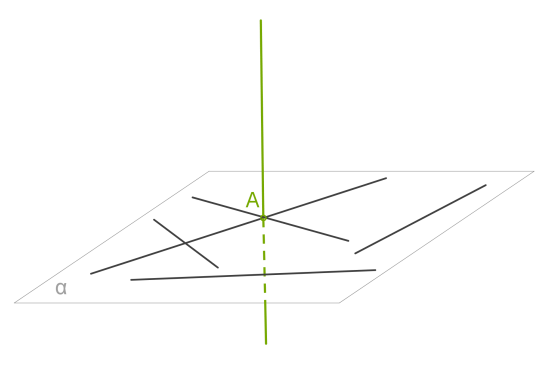
В пространстве перпендикулярными называют не только пересекающиеся прямые, но и скрещивающиеся прямые, так как мы говорим **об угле**, который могут образовать эти прямые, если их поместить в одной плоскости.

Так же как и в плоскости, в пространстве перпендикулярные прямые a и b обозначают a⊥b.

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая перпендикулярна к этой прямой.

Перпендикулярность прямой и плоскости

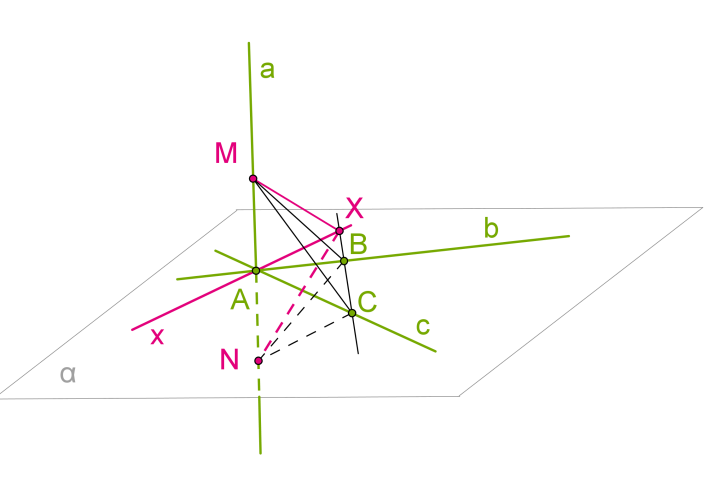
**Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой, которая лежит в данной плоскости.**



Перпендикулярность прямой и плоскости обозначается как a⊥α.

Через любую точку пространства проходит прямая перпендикулярно данной плоскости, притом только одна.

**Признак перпендикулярности прямой и плоскости.**  
Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.



**Ответьте на вопросы теста:**

**Вариант 1**

|  |  |
| --- | --- |
| 1 | Через сторону АВ треугольника АВС проведена плоскость, перпендикулярная к стороне ВС. Определите вид треугольника относительно углов.  1) остроугольный 2) прямоугольный 3) тупоугольный |
| 2 | Треугольник АВС – правильный, О – центр треугольника.  Расстояние от точки М до вершины А равно 3. Найдите высоту треугольника.  Ответ: \_\_\_\_ |
| 3 | АВСD – параллелограмм;  Найдите периметр параллелограмма.  1) 20 2) 25 3) 40 4) 60 |
| 4 | Через вершину А треугольника ABC проведена плос­кость α, параллельная ВС. Расстояние от ВС до плоскости α равно 12. Найдите расстояние от точки пересечения ме­диан треугольника АВС до этой плоскости.  1) 8 2) 6 3) 12 4) 18 |
| 5 | Высота ромба равна 12. Точка М равноудалена от всех сторон ромба и находится на расстоянии, равном 8, от его плоскости. Чему равно расстояние точки М до сторон ромба?  Ответ: \_\_\_\_ |
| 6 | На рисунке  Найдите угол между МС и плоскостью АМВ.  1) 300 2) 600 3) 900 4) 450 |
| 7 | Выберите **верные** высказывания:  1) Прямая пересекает параллельные плоскости под разными углами.  2) Две прямые, перпендикулярные к одной плоскости, параллельны.  3) Длина перпендикуляра меньше длины наклонной, проведенной из той же точки.  4) Две скрещивающиеся прямые могут быть перпендикулярными к одной плоскости.  Ответ: \_\_\_\_\_\_ |
| 8 | Отрезок АВ упирается концами А и В в грани прямого двугранного угла. Расстояния от точек А и В до ребра равны 1, а длина отрезка АВ равна 3. Найдите длину про­екции этого отрезка на ребро.  1) 2 2)  3) 3 4) |
| 9 | В тетраэдре DABC АО пресекает ВС в точке Е;  Найдите .  1) 3 2)  3)  4) |
| 10 | Прямоугольник ABCD и параллелограмм ВЕМС распо­ложены так, что их плоскости взаимно перпендикулярны. Найдите угол MCD.  1) 900 2) 600 3) 300 4) 450 |

**Вариант 2**

|  |  |
| --- | --- |
| 1 | Через сторону АD параллелограмма АВСD, проведена плоскость, перпендикулярная к стороне DС. Определите вид треугольника АВС.  1) остроугольный 2) прямоугольный 3) тупоугольный |
| 2 | Треугольник АВС – правильный, О – центр треугольника.  Высота треугольника равна 3. Найдите расстояние от точки М до вершин треугольника.  Ответ: \_\_\_\_ |
| 3 | АВСD – параллелограмм;  Найдите BD.  1) 20 2) 15 3) 40 4) 10 |
| 4 | Через вершину А треугольника ABC проведена плос­кость α, параллельная ВС. Расстояние от точки пересече­ния медиан треугольника АВС до этой плоскости равно 4. На каком расстоянии от плоскости находится ВС?  1) 8 2) 6 3) 12 4) 14 |
| 5 | Точка Р удалена от всех сторон ромба на расстояние» равное , и находится от его плоскости на расстоянии равном 2. Чему равна сторона ромба, если его угол 30°?  Ответ: \_\_\_\_ |
| 6 | На рисунке  Найдите угол между МС и плоскостью АМВ.  1) 300 2) 600 3) 900 4) 450 |
| 7 | Выберите **верные** высказывания:  1) Угол между прямой и плоскостью может быть не больше 900.  2) Две плоскости, перпендикулярные к одной прямой, пересекаются.  3) Длина перпендикуляра больше длины наклонной, проведенной из той же точки.  4) Диагональ прямоугольного параллелепипеда больше любого из ребер.  Ответ: \_\_\_\_\_\_ |
| 8 | Отрезок АВ упирается концами А и В в грани прямого двугранного угла. Расстояния от точек А и В до ребра равны 2, а длина отрезка АВ равна 4. Найдите длину про­екции этого отрезка на ребро.  1) 3 2)  3)  4) |
| 9 | В тетраэдре DABC основание ABC — правильный тре­угольник. Вершина D проецируется в его центр О. Найди­те угол между плоскостью ADO и гранью DCB.  1) 300 2) 600 3) 900 4) 450 |
| 10 | Треугольник АМВ и прямоугольник ABCD расположе­ны так, что их плоскости взаимно перпендикулярны. Най­дите угол MAD.  1) 900 2) 600 3) 300 4) 450 |

**Практическая работа № 25**«Угол между прямой и плоскостью»

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

определение перпендикуляра, наклонной, проекции наклонной на плоскости

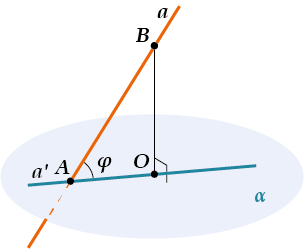
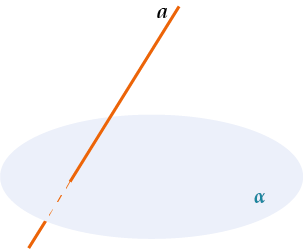
*уметь:*

*решать задачи*

**Немного теории**

## Угол между прямой и плоскостью – это...угол между прямой и её проекцией на эту плоскость

Как определить угол между ними? Оказывается (в соответствии с определением, которое мы только что дали) нужно опустить перпендикуляр из любой точки прямой  на плоскость



А потом провести прямую через точки A и O

**Постройте угол между прямой и плоскостью**

* + - 1. *АА1* ⊥ (*АВС*). Найдите угол между *СB1* и (*АА1С1*).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *А*  *А1*  *B*  *С*  *С1*  *В1* | *А*  *А1*  *B*  *С*  *С1*  *В1* | *А*  *А1*  *B*  *С*  *С1*  *В1* |
| Δ*АВС*– равносторонний | Δ*АВС* – прямоугольный,  ∠*С* = 900 | Δ*АВС* – тупоугольный,  ∠*С* > 900 |

* + - 1. *АА1* ⊥ (*АВС*). *ABCDFK* – правильный шестиугольник. Найдите угол между

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *В1F* и (*АВС*) | *В1F* и (*КК1F1*) | *В1F* и (*АА1В1*) |
| *K*  *F*  *D*  *C*  *B*  *A*  *A1*  *K1*  *F1*  *D1*  *C1*  *B1* | *K*  *F*  *D*  *C*  *B*  *A*  *A1*  *K1*  *F1*  *D1*  *C1*  *B1* | *K*  *F*  *D*  *C*  *B*  *A*  *A1*  *K1*  *F1*  *D1*  *C1*  *B1* |

* + - 1. *BD* ⊥ (*АВС*). Найдите угол между *CD* и (*ABD*).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *С*  *A* *D* *В* | *С*  *A* *D* *В* | *С*  *A* *D* *В* |
| Δ*АВС* – равносторонний | Δ*АВС* – прямоугольный,  ∠*А* = 900 | Δ*АВС* – прямоугольный,  ∠*С* = 900 |

* + - 1. *АА1* ⊥ (*АВС*). Найдите углы между

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *В1D* и (*ABC*) | *B1D* и (*DD1C1*) | *B1D* и (*ВВ1C1*) |
| *A*  *B*  *C*  *D*  к  в  а  д  р  а  т | *А1*  *А*  *В*  *С*  *D*  *B1*  *C1*  *D1* | *А1*  *А*  *В*  *С*  *D*  *B1*  *C1*  *D1* | *А1*  *А*  *В*  *С*  *D*  *B1*  *C1*  *D1* |
| *A*  *B*  *C*  *D*  р  о  м  б | *А1*  *А*  *В*  *С*  *D*  *B1*  *C1*  *D1* | *А1*  *А*  *В*  *С*  *D*  *B1*  *C1*  *D1* | *А1*  *А*  *В*  *С*  *D*  *B1*  *C1*  *D1* |

* + - 1. *BF* ⊥ (*АВС*). Найдите угол между

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *AF* и (*АВС*) | *DF* и (*BCF*) | *CF* и (*ABF*) |
| *A*  *B*  *C*  *D*  к  в  а  д  р  а  т | *С*  *D*  *В*  *А*  *F* | *С*  *D*  *В*  *А*  *F* | *С*  *D*  *В*  *А*  *F* |
| *A*  *B*  *C*  *D*  р  о  м  б | *С*  *D*  *В*  *А*  *F* | *С*  *D*  *В*  *А*  *F*  А  В  С  D  F | *С*  *D*  *В*  *А*  *F*  А  В  С  D  F  А  В  С  D  F |

**Практическая работа №35** «Разложение вектора по трем некомпланарным векторам»

**Использование векторов при решении математических и прикладных задач**

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

- векторы и простейшие действия над ними;

*уметь:*

* применять правила действия над векторами при решении математических и прикладных задач.

***Сведения из теории:***

Рассмотрим задачи трёх типов, которые целесообразно решать с помощью векторов.

*Первый тип: задачи, связанные с доказательством параллельности прямых и отрезков, прямых и плоскости*

***Пример***

Доказать что вектор, концами которого являются середины двух противолежащих сторон четырехугольника, равен половине векторной суммы двух других противолежащих сторон.

Решение:

пусть *ABCD* – четырехугольник, *M* – середина *AB*, *N*– середина *CD*. Тогда необходимо доказать, что .

Пусть *О* – произвольная точка плоскости, соединим ее с вершинами и серединами двух сторон четырехугольника, выполним рисунок (рис. 86):

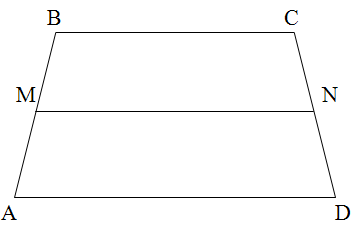


Рис.13.

Рисунок 86.

По правилу деления отрезка в заданном отношении, имеем:

,

.

По правилу треугольника, имеем:



***Задача для самостоятельного решения №1.* Доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.**

*Второй тип: задачи, в которых доказывается, что некоторая точка делит отрезок в заданном отношении*

***Пример*** На стороне *AC* треугольника *ABC* взята точка *M* так, что , а на продолжении стороны *BC* такая точка *N* что . В каком отношении точка *P* пересечения *AB* и MN делит каждый из этих отрезков.



Решение:

выполним рисунок (рис. 87), соответствующий условию задачи:

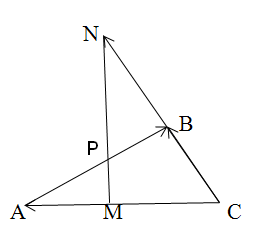


Рисунок 87.

Пусть и.

Выберем базисные векторы .

Разложим вектор  по базисным двумя различными способами:



*а*) , тогда , т.к. векторы  и  сонаправлены, то

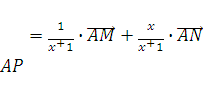


.

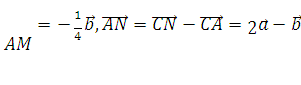
Т.е.

.

*б*)  тогда , .



Но, по условию задачи , , поэтому



.

В полученном выражении раскроем скобки, упростим, тогда получим:

.

Учитывая единственность разложения вектора по двум неколлинеарным векторам, получим систему:



Решая систему любым известным способом (сложением, подстановкой), получим:



Следовательно, точка *P* делит отрезок *AB* в отношении 2:3 и отрезок MN в отношении 1:4.

***Задача для самостоятельного решения №2.*** На диагоналях *АВ*1 и *ВС*1 граней *AA*1*B*1*B* и *ВВ*1*С*1*С* параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 взяты точки соответственно *Н* и *M* так, что отрезки *MН* и *A*1*C* параллельны. Найдите отношение длин этих отрезков (воспользуйтесь предложенным рис. 88).

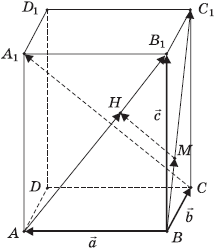


Рисунок 88.

*Третий тип: задачи на доказательство принадлежности трех и более точек одной прямой*

***Пример***

Точки *M* и *N* лежат соответственно на сторонах *AD* и *BC* четырехугольника *ABCD*, причем *AM*:*MD*=*BN*:*NC*=3:4. Докажите, что середины отрезков *AB*, *MN* и *CD* лежат на одной прямой.

Решение:

выполним рисунок (рис. 89), соответствующий условию задачи

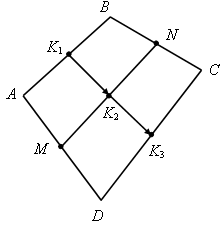


Рисунок 89.

Пусть *K*1 – середина *AB*, *K*2 – середина *MN*, *K*3 – середина *CD*. Используя формулы деления отрезка в заданном отношении, имеем:

,

.

Из условия *AM*:*MD*=*BN*:*NC*=3:4 следует, что

.

Следовательно,

.

Т.о., векторы  и  коллинеарны, и, значит, точки *K*1, *K*2 и *K*3 лежат на одной прямой.

***Задача для самостоятельного решения №3.*** В пространстве расположены отрезки *АВ* и *А*1*В*1. Точка *М* есть середина отрезка *АВ,* точка *М*1 – середина *А*1*В*1. Докажите, что середины отрезков *АА*1, *ВВ*1, и *ММ*1 расположены на одной прямой.

***Контрольные вопросы:***

1. Приведите примеры задач, которые целесообразно решать с помощью векторов.

**Практическая работа №25** «Вычисление углов между прямыми и плоскостями»

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

*уметь:*

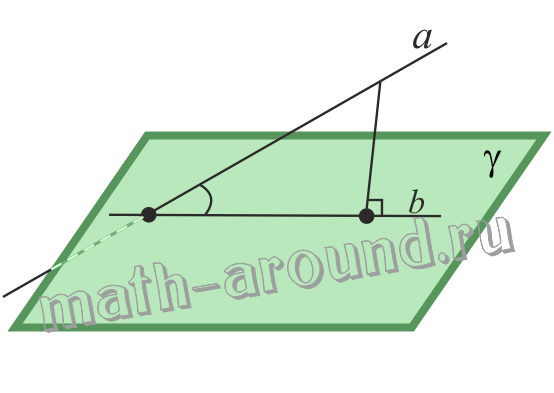
решать задачи

***Сведения из теории:***

**Определение.**Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

Пусть даны плоскость γ и прямая a, которая пересекает эту плоскость и не перпендикулярна к ней.

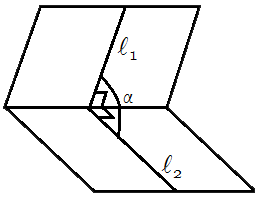
Построим угол между прямой a и плоскостью γ:



1. Из любой удобной для нас точки прямой a опустим перпендикуляр к плоскости γ;
2. Через точки оснований наклонной и перпендикуляра проведем прямую b . Прямая b - проекция прямой a на плоскость γ;
3. Острый угол между прямыми a и b – это угол между прямой a и плоскостью γ, т.е. ∠(a;b)= ∠(a;γ) , где ∠(a;b) - угол между прямыми а и b; ∠(a;γ) - угол между прямой а и плоскостью γ.

**Двугранный угол между плоскостями** равен углу образованному нормальными векторами этих плоскостей.

**Двугранный угол между плоскостями** равен углу образованному прямыми l1 и l2, лежащими в соответствующих плоскостях и перпендикулярными линии пересечения плоскостей.



**Постройте углы:**

1. . . Найдите угол между

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | (*ABC*) и (*FDC*) | (*FDC*) и (*FBC*) | (*ABF*) и (*FDC*) |
| *A*  *B*  *C*  *D*  к  в  а  д  р  а  т | *B*  *C*  *F*  *A*  *D*  *O*  *B*  *C*  *F*  *A*  *D*  *O* | *B*  *C*  *F*  *A*  *D*  *O* | *B*  *C*  *F*  *A*  *D*  *O* |
| *A*  *B*  *C*  *D*  р  о  м  б |  | *B*  *C*  *F*  *A*  *D*  *O* | *B*  *C*  *F*  *A*  *D*  *O* |

1. *FB* ⊥ (*ABC*). Найдите угол между

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | (*ABC*) и (*FDC*) | (*AFB*) и (*FBC*) | (*AFD*) и (*FBC*) |
| *A*  *B*  *C*  *D*  к  в  а  д  р  а  т | *С*  *D*  *В*  *А*  *F*  *С*  *D*  *В*  *А*  *F* | *С*  *D*  *В*  *А*  *F*  *С*  *D*  *В*  *А*  *F* | *С*  *D*  *В*  *А*  *F*  *С*  *D*  *В*  *А*  *F* |
| *A*  *B*  *C*  *D*  р  о  м  б |  |  |  |

1. *AF* ⊥ (*ABC*). Найдите угол между (*ABC*) и (*FCB*).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *F*  *B*  *C*  *А* | *F*  *B*  *C*  *А* | *F*  *B*  *C*  *А* |
| Δ*АВС*– равнобедренный | Δ*АВС* – прямоугольный,  ∠*С* = 900 | Δ*АВС* – тупоугольный,  ∠*С* > 900 |

1. *SB* ⊥ (*ABC*). *ABCDEF* – правильный шестиугольник. Найдите угол между

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (*SAB*) и (*SBC*) | (*SFЕ*) и (*ABC*) | (*ASF*) и (*ABC*) |
| *S*  *A*  *F*  *E*  *D*  *C*  *B* | *S*  *A*  *F*  *E*  *D*  *C*  *B* | *S*  *A*  *F*  *E*  *D*  *C*  *B* |
| (*FSЕ*) и (*DSE*) | (*ASB*) и (*SDE*) | (*ASF*) и (*SCD*) |
| *S*  *A*  *F*  *E*  *D*  *C*  *B* | *S*  *A*  *F*  *E*  *D*  *C*  *B* | *S*  *A*  *F*  *E*  *D*  *C*  *B* |

1. *ABCDA1B1C1D1* – прямой параллелепипед. Найдите угол

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | (*AА1C1*) и (*BB1D1*) | (*ABC*) и (*AB1C1*) | (*ABC*) и (*AB1C)* |
| *A*  *B*  *C*  *D*  к  в  а  д  р  а  т | *B*  *D*  *C*  *D1*  *C1*  *B1*  *A1*  *A* | *B*  *D*  *C*  *D1*  *C1*  *B1*  *A1*  *A* | *B*  *D*  *C*  *D1*  *C1*  *B1*  *A1*  *A* |
| п  а  р  а  л  л  е  л  о  г  р  а  м  м | *B*  *D*  *C*  *D1*  *C1*  *B1*  *A1*  *A* | *B*  *D*  *C*  *D1*  *C1*  *B1*  *A1*  *A* | *B*  *D*  *C*  *D1*  *C1*  *B1*  *A1*  *A* |

**Практическая работа №17** «Предел последовательности»

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

* определение предела функции;
* свойства и правила вычисления пределов функции;

*уметь:*

* вычислять пределы функции в точке, на бесконечности.

***Сведения из теории:***

*Предел функции*

Число *А* называют пределом функции *f*(*x*) в точке *а* если при *х*→*а*, *f*(*x*) →*А*.



*Бесконечно малые и бесконечно большие функции*

Функция *f*(*x*) называется бесконечно малой при *х*→*а*, если



Функция *f*(*x*) называется бесконечно большой при *х*→*а*, если



*Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций*

Если функции *f*(*x*) и *g*(*x*) бесконечно малые при *х*→*а*, то (*f*(*x*)+*g*(*x*)) бесконечно малая при *х*→*а*.

Если функция *f*(*x*) бесконечно малая при *х*→*а* и *g*(*x*) – ограниченная, то  – бесконечно малая.

Если существует , а *g*(*x*) – бесконечно большая при *х*→*а*, то ; .

Если при *х*→*а*, *f*(*x*) – бесконечно малая, то  – бесконечно большая.

Если при *х*→*а*, *f*(*x*) – бесконечно большая, то  – бесконечно малая.

*Теоремы о пределах*

Если существуют пределы функций *f*(*x*) и *g*(*x*), то существует предел суммы (разности) этих функций, который равен сумме (разности) пределов функций *f*(*x*) и *g*(*x*):

.

Если существуют пределы функций *f*(*x*) и *g*(*x*), то существует предел произведения этих функций, который равен произведению пределов этих функций:

.

Если существуют пределы функций *f*(*x*) и *g*(*x*) при *х*→*а* и предел *g*(*x*)≠0, то существует предел частного этих функций, который равен отношению их пределов:

.

Следствие: постоянный множитель можно вынести за знак предела:

.

***Пример*** Вычислить предел .

Решение:

здесь применима теорема о пределе частного.

Разложим на множители квадратный трехчлен, для этого достаточно найти корни *х*1 и *х*2 квадратного уравнения *ах*2+*bх*+*с*=*а*(*х*–*х*1)·(*х*–*х*2):

9*х*2+8*х*–1=9·(*х*-)·(*х*+1).

Под знаком предела сократим одинаковые множители и перейдем к пределу:



***Пример***

Вычислить предел

Решение.

обнаружив неопределенность , раскладываем многочлены в числителе и в знаменателе на множители:

.

Числитель дроби стремится к конечному пределу, равному 3, а знаменатель при *х*→1 является бесконечно малой, тогда дробь при *х*→1 является бесконечно большой.

Для раскрытия неопределенности  следует числитель и знаменатель разделить на одну и ту же старшую степень переменной.

***Пример*** Вычислить предел .

Решение:

в заданном пределе  числитель и знаменатель не имеют конечных пределов, имеем неопределенность . Поделив одновременно числитель и знаменатель на *х*3, получим

,

т. к. каждая из дробей  является бесконечно малой и стремится к нулю.

***Задания для самостоятельного решения:***

Вычислите пределы:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1 вариант** | **2 вариант** | **3 вариант** |
| **4 вариант** | **5 вариант** | **6 вариант** |
| **7 вариант** | **8 вариант** | **9 вариант**  1) ;  2) ;  3) ;  4) . |

***Контрольные вопросы:***

1. Что называется пределом функции в точке.
2. Сколько пределов может иметь функция в точке?
3. Сформулируйте теоремы о пределах.

**Практическая работа №18** «Техника дифференцирования»

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

* систему и определение производной;
* табличные решения производных элементарных функций, в том числе обратных тригонометрических функций;
* правила дифференцирования функций;

*уметь:*

* находить производную функции;
* находить дифференциал функции;
* дифференцировать элементарные функции.

***Сведения из теории:***

*Табличные значения производных элементарных функций, тригонометрических и обратных тригонометрических функций:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

*Правила вычисления производных:*





***Пример*** Вычислите производную функции .

Решение:

воспользуемся формулами и правилом 1 вычисления производных:



***Пример*** Вычислите производную функции 

Решение:

воспользуемся формулами и правилом 2 вычисления производных:



Приведем дроби к общему знаменателю:



***Задания для самостоятельного решения:***

Вычислите производную функции:

|  |  |
| --- | --- |
| **1 вариант**  1) ;  2) ;  3) ;  4) . | **2 вариант**  1) ;  2) ;  3) ;  4). |
| **3 вариант**  1) ;  2) ;  3) ;  4). | **4 вариант**  1) ;  2) ;  3) ;  4). |
| **5 вариант**  1) ;  2) ;  3) ;  4). | **6 вариант**  1) ;  2) ;  3) ;  4) . |
| **7 вариант**  1) ;  2) ;  3) ;  4). | **8 вариант**  1) ;  2) ;  3) ;  4). |
| **9 вариант** 3) ;  1) ; 4).  2) ; | |

***Контрольные вопросы:***

1. Перечислите значения производных некоторых табличных функций.
2. Сформулируйте правила вычисления производных.

**Практическая работа №19** «Составление уравнения касательной»

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

-определения касательной функции функции;

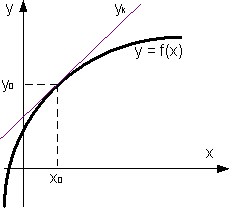
*уметь:*

-писать уравнение касательной

***Сведения из теории:***

**Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции**

1. Вычисление значения функции y0 в точке x0:y0 = f(x0). Если исходное значение y0 задано, то переходим к п.2.
2. Нахождение производной y'(x).
3. Вычисление значения производной при x0.
4. Запись уравнения касательной к кривой линии в форме: yk = y0 + y'(y0)(x - x0)



**Пример:** Написать уравнения касательной к кривой x3 в точке M0 с абсциссой x0 = 2.   
**Решение**    
Запишем уравнения касательной в общем виде:   
yk = y0 + y'(x0)(x - x0)   
По условию задачи x0 = 2, тогда y0 = 23 = 8   
Теперь найдем производную:   
y' = (x3)' = 3•x2   
следовательно:   
f'(2) = 3•22 = 12   
В результате имеем:   
yk = y0 + y'(x0)(x - x0)   
yk = 8 + 12(x - 2)   
или   
yk = 12•x-16 

**Задание:**

* 1. Составьте уравнение касательной к кривой *y=4-x2* в точке с абсциссой x=1.
  2. Дана функция *y* = *x*3. Составить уравнение касательной к графику этой функции в точке *x*0 = 2
  3. Составить уравнение касательной к графику функции *f* (*x*) = 2sin *x* + 5 в точке *x*0 = *π*/2.

**Практическая работа №21«**Исследование функций на монотонность и экстремумы»

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

-определения возрастающей (убывающей) функции;

-определения точки максимума (минимума) функции;

*уметь:*

-находить промежутки монотонности функции;

-вычислять точки экстремума функции.

***Сведения из теории:***

*Возрастание и убывание функций*

Функция *f* возрастает на множестве *Р*, если для любых *х*1 и *х*2 из множества *Р*, таких, что *х*2>*х*1, выполнено неравенство *f*(*x*2)>*f*(*x*1).

Функция *f* убывает на множестве *Р*, если для любых *х*1 и *х*2 из множества *Р*, таких, что *х*2>*х*1, выполнено неравенство *f*(*x*2)<*f*(*x*1).

Иными словами, функция *f* называется возрастающей на множестве *Р*, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции. Функция *f* называется убывающей на множестве *Р*, если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции.

***Пример*** Докажите, что функция *f*(*x*)=1/*x* является убывающей.

Решение:

область определения функции: (-∞; 0) и (0; +∞). Рассмотрим поведение функции на каждом интервале:

(-∞; 0): *х*1=-8, *х*2=-4, т.е. *х*2>*х*1, тогда *f*(*-*8)=-0,125, *f*(-4)=-0,25, т.е *f*(*x*2)<*f*(*x*1), а значит функция *f*(*x*)=1/*x* является убывающей на интервале (-∞; 0).

(0; +∞): *х*1=4, *х*2=8, т.е. *х*2>*х*1, тогда *f*(4)=0, 25, *f*(8)=0,125, т.е. т.е *f*(*x*2)<*f*(*x*1), а значит функция *f*(*x*)=1/*x* является убывающей на интервале (0; +∞).

Однако эта функция не является убывающей на объединении этих промежутков. Например, 1>-1, но *f*(1)<*f*(-1).

При исследовании функций на возрастание и убывание принято указывать промежутки возрастания и убывания максимальной длины, включая концы (если, конечно, они входят в эти промежутки). Так, можно было сказать, что функция *f*(*x*)=1/*x* является убывающей на отрезке [2; 500]. Это верно, но такой ответ неполон.

При исследовании поведения функции вблизи некоторой точки удобно пользоваться понятием окрестности.

*Окрестностью* *точки а* называется любой интервал, содержащий эту точку. Например, интервал (2; 6) – одна из окрестностей точки 3, интервал (-3,3; -2,7) – окрестность точки -3.

*Экстремумы*

Точка *х*0 называется *точкой минимума* функции *f*, если для всех *х* из некоторой окрестности *х*0 выполнено неравенство *f*(*x*)≥*f*(*x*0).

Точка *х*0 называется *точкой максимума* функции *f*, если для всех *х* из некоторой окрестности *х*0 выполнено неравенство *f*(*x*)≤*f*(*x*0).

По определениям значение функции *f* в точке максимума *х*0 является наибольшим среди значений функции из некоторой окрестности этой точки, поэтому график функции в окрестности *х*0, как правило, имеет вид гладкого «холма» или заостренного «пика». В окрестности точки минимума графики, как правило, изображаются в виде «впадины», тоже или гладкой или заостренной.

Для точек максимума и минимума функции принято общее название – их называют *точками экстремума*.

Значение функции в этих точках называют соответственно максимумами и минимумами функции (общее название – экстремум функции). Точки максимума обозначают *x*max, а точки минимума *x*min. Значения функции в этих точках обозначаются соответственно *y*max, *y*min.

***Пример*** Начертите эскиз графика функции *f*, если известно, что *f* возрастает на промежутке (-∞; 2] и убывает на промежутке [2; +∞). Какой будет точка *х*=2?

Решение:

схематично график можно изобразить в виде:

Рисунок 10. Эскиз графика

График имеет вид гладкого «холма», а значит точка *х*=2 – точка максимума.

***Задания для самостоятельного решения:***

Начертите эскиз графика функции *f*, определите вид точек, если:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1 вариант**  *f* возрастает на промежутке (-∞; 2] и убывает на промежутке [2; +∞). | **2 вариант**  *f* возрастает на промежутках (-∞; -2] и [0; 3], убывает на промежутке [2; 0]. | **3 вариант**  *f* возрастает на промежутке [1; 4] и убывает на промежутках (-∞; 1] и [4; +∞). |
| **4 вариант**  *f* возрастает на промежутках (-∞; -5] и [1; 5], убывает на промежутках [-5; 1] [5; +∞). | **5 вариант**  *f* возрастает на промежутке (-∞; 5] и убывает на промежутке [5; +∞). | **6 вариант**  *f* возрастает на промежутке (-∞; 0] и убывает на промежутке [0; +∞). |
| **7 вариант**  *f* возрастает на промежутке [-1; 2] и убывает на промежутках (-∞; -1] и [2; +∞). | **8 вариант**  *f* возрастает на промежутках (-∞; -4] и [2; 4], убывает на промежутках [-4; 2] [4; +∞). | **9 вариант**  *f* возрастает на промежутках (-∞; -3] и [2; 5], убывает на промежутках [-3; 2] [5; +∞). |

***Контрольные вопросы:***

Какая функция называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке?

Дайте определение точке максимума (минимума) функции.

**Практическая работа №28** **«**Построение графиков функции»

**Построение графиков**

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

свойства функций;

схему исследования функции;

*уметь:*

строить графики функций.

***Сведения из теории:***

*Четные и нечетные функции*

Рассмотрим функции области определения которых симметричны относительно начала координат, т.е. для любого *х* из области определения функции число (-*х*) также принадлежит области определения. Среди таких функций выделяют четные и нечетные.

Функция *f* называется четной, если для любого *х* из области определения *f*(-*x*)=*f*(*x*).

Функция *f* называется нечетной, если для любого *х* из области определения *f*(-*x*)=-*f*(*x*).

***Пример*** Определите какая из функций является четной (нечетной): *у*=*х*4, *у*=*х*3.

Решение:

функция *у*=*х*4 четная, т.к. *х*4=(-*х)*4, т.е. *у*(-*x*)=*у*(*x*), а функция *у*=*х*3 является нечетной, т.к. *х*3=(-*х)*3=- *х*3, т.е. *у*(-*x*)=-*у*(*x*).

***Пример*** Докажите, что функция  четная.



Решение:

вычислим *f*(-*x*):

,



т.е.  – четная по определению.



*Свойства графиков:*

1. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

2. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Из этих двух правил вытекает следующее: при построении графика четной или нечетной функции достаточно построить его часть для неотрицательных *х*, а затем отразить полученный график относительно оси ординат (в случае четной функции) или начала координат (в случае нечетной).

Ранее мы строили графики функций «по точкам». Во многих случаях этот метод дает хорошие результаты, если, конечно, отметить достаточно большое число точек. Однако при этом приходится составлять большие таблицы значений функции, а главное, можно не заметить существенных особенностей функции и в итоге ошибиться при построении графика.

Для того чтобы избежать ошибок, надо научиться выявлять характерные особенности функции, т.е. предварительно провести ее исследование.

*Схема исследования функций:*

1. Найти область определения и область значений данной функции.
2. Выяснить, обладает ли функция особенностями, облегчающими исследование, т.е. является ли функция четной (нечетной), периодической.
3. Вычислить координаты графика функции с осями координат.
4. Найти промежутки знакопостоянства функции.
5. Выяснить, на каких промежутках функция убывает, а на каких возрастает.
6. Найти точки экстремума, вид экстремума (минимум или максимум) и вычислить значения функции в этих точках.
7. Исследовать поведение функции в окрестности характерных точек, не входящих в область определения (например, точка *х*=0 для функции *f*(*x*)=1/*x*), и при больших (по модулю) значениях, аргумента.

Необходимо заметить, что этот план имеет примерный характер.

***Задания для самостоятельного решения:***

Построить график функции *f*, если известны ее свойства:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. | Свойство функции | 1 вариант | 2 вариант | 3 вариант | 4 вариант |
|  | Область определения  Область значений | [-6; 6]  [-2; 5] | [-5; 4]  [0; 6] | [-4; 4]  [-3; 6] | [-5; 3]  [0; 5] |
| 2 | Точки пересечения графика: | | | | |
| а) с осью О*х* | (-4; 0),  (-2; 0) | (0; 0) | (-4; 0),  (-1; 0),  (2,5; 0) | (3; 0) |
| б) с осью О*у* | (0; 2,5) | (0; 0) | (0; -2) | (0; 4,5) |
| 3 | Промежутки знакопостоянства: | | | | |
| а) *f*(*x*)>0 | [-6; -4),  (-2; 6] | [-5; 0),  (0; 4] | (-4; -1),  (2,5; 4] | [-5; 3) |
| б) *f*(*x*)<0 | (-4; -2) | - | (-1; 2,5) | - |
| 4 | Промежутки: | | | | |
| а) возрастания | [-3; 1],  [4; 6] | [-5; -2],  [0; 4] | [-4; -2],  [1; 4] | [-3; 1] |
| б) убывания | [-6; -3],  [1; 4] | [-2; 0] | [-2; 1] | [-5; -3],  [1; 3] |
| 5.1 | Точки максимума, максимум функции | *x*max=1  *y*max=3 | *x*max=-2  *y*max=2 | *x*max=-2  *y*max=2 | *x*max=1  *y*max=5 |
| 5.2 | Точки минимума, минимум функции | *x*min1=-3,  *y*min1=-2;  *x*min2=4  *y*min2=1 | *x*min=0  *y*min=0 | *x*min=1  *y*min=-3 | *x*min=-3  *y*min=2 |
| 6 | Дополнительные точки графика | (-6; 3),  (6; 5) | (-5; 0,5),  (4; 6) | (4; 6) | (-5; 3) |

***Контрольные вопросы:***

1. Перечислите свойства функций.
2. Перечислите основные этапы исследования функции.

**Практическая работа №37** «Нахождениепервообразных»

**Цели:**

* Повторить знания о первообразной, таблицу первообразных
* Овладеть умением применения первообразной функции при решении вычислительных задач.
* Закрепить навыки нахождения первообразных

**Теоретическая часть.**

*Определение.* Функция F (x) называется первообразной для функции f (x) на данном промежутке, если для любого х из данного промежутка F'(x)= f (x).

*Основное свойство первообразных.*

Если F (x) – первообразная функции f (x), то и функция F (x)+ C , где C –произвольная постоянная, также является первообразной функции f (x) (т.е. все первообразные функции f(x) записываются в виде F(x) + С ).

*Геометрическая интерпретация.*

Графики всех первообразных данной функции f (x) получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси Оу.

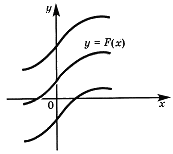
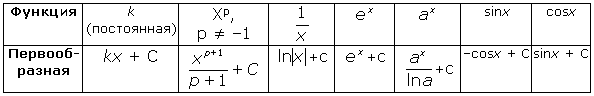


Таблица первообразных.



*Правила нахождения первообразных* .

Пусть F(x) и G(x) – первообразные соответственно функций f(x) и g(x). Тогда:

1.  F (*x*) ± G (*x*) – первообразная для *f*(*x*) ± *g*(*x*);

2.  *а*F (*x*) – первообразная для *а f*(*x*);

3. – первообразная для *а f*(*kx + b*).



**Пример 1**. Найти общий вид первообразных для функции f(x) = x^3 +1/x^2. Для функции x^3 одной из первообразных будет функция (x^4)/4, а для функции 1/x^2 одной из первообразных будет являться функция -1/x. Используя первое правило, имеем:

F(x) = x^4/4 – 1/x +C.

**Пример 2**. Найдем общий вид первообразных для функции f(x) = 5\*cos(x). Для функции cos(x) одна из первообразных будет являться функция sin(x). Если теперь воспользоваться вторым правилом, то будем иметь:

F(x) = 5\*sin(x).

**Пример 3.** Найти одну из первообразных для функции y = sin(3\*x-2). Для функции sin(x) одной из первообразных будет являться функция -cos(x). Если теперь воспользоваться третьим правилом, то получим выражение для первообразной:

F(x) = (-1/3)\*cos(3\*x-2)

**Пример 4**. Найти первообразную для функции f(x) = 1/(7-3\*x)^5

Первообразной для функции 1/x^5 будет являться функция (-1/(4\*x^4)). Теперь воспользовавшись третьим правилом, получим:

F(x) = 1/(12\*(7-3\*x)^4).

**Ответьте на вопросы:**

1) Продолжить фразу

первообразная – это …

первообразная суммы …

постоянный множитель …

основное свойство первообразной …

геометрический смысл первообразной …

Найдите первообразные функций.



2) Дано: . Найти F(x).



**Практическая работа №37**«Вычисление интегралов»

**Цели:**

* Повторить знания о первообразной, таблицу интегралов.
* Овладеть умением применения первообразной функции при решении вычислительных задач.
* Закрепить навыки нахождения табличных интегралов.
* Развивать логическое мышление, память, внимание и самостоятельность.

**Теоретическая часть.**

* + **Таблица первообразных:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| f(x) | k | xn |  |  | sinx | cosx |  |  | *a*x | ex |
| F (x) | kx |  | lnx |  | -cosx | sinx | tgx |  |  | ex |

* + Формула пути, пройденного точкой: 
  + Формула площади плоской фигуры 

**Практическая часть.**

* + - Найти неопределённый интеграл, использую таблицу интегралов.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1.1** | **1.6** | **1.11** |
| **1.2** | **1.7** | **1.12** |
| **1.3** | **1.8** | **1.13** |
| **1.4** | **1.9** | **1.14** |
| **1.5** | **1.10** |  |

* + - Найти неопределённый интеграл, использую таблицу интегралов.

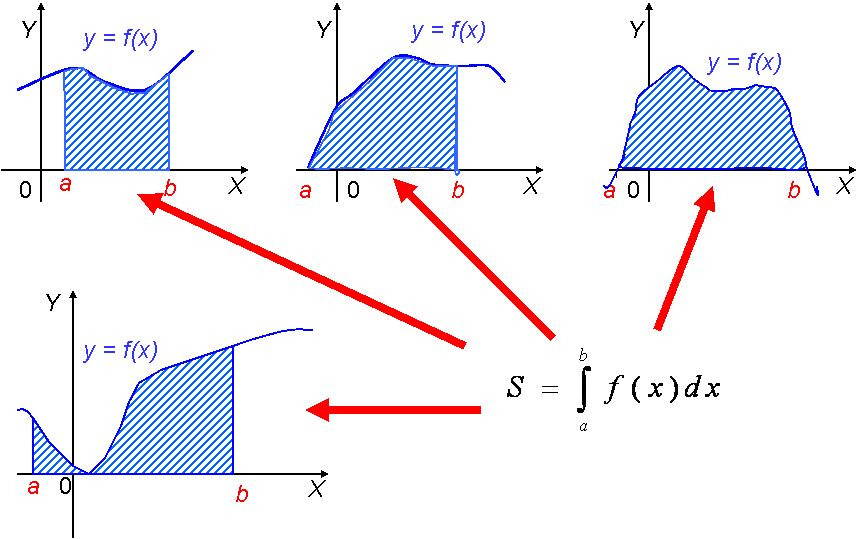
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **2.1** | **2.6** | **2.11** |
| **2.2** | **2.7** | **2.12** |
| **2.3** | **2.8** | **2.13** |
| **2.4** | **2.9** | **2.14** |
| **2.5** | **2.10** | **2.15** |

**Практическая работа №37** «Вычисление площадей плоских фигур»

**Цели:**

* Повторить знания о первообразной.
* Закрепить навыки нахождения табличных интегралов, площадей криволинейных трапеций с помощью формулы Ньютона-Лейбница.
* Проверить уровень сформированности навыка нахождения первообразных.
* Способствовать выработке вычислительных навыков.
* Развивать логическое мышление, память, внимание и самостоятельность.

**Теоретическая часть.**



**Практическая часть**

* Вычислить определённый интеграл.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1.1** | **1.6** | **1.11** |
| **1.2** | **1.7** | **1.12** |
| **1.3** | **1.8** | **1.13** |
| **1.4** | **1.9** | **1.14** |
| **1.5** |  |  |

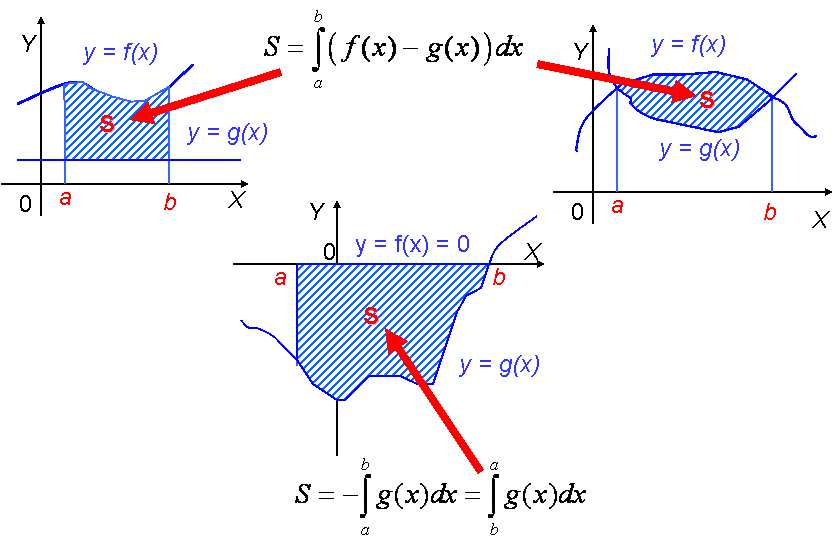
* Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной заданными линиями.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **2.1** | **2.6** | **2.11** |
| **2.2** | **2.7** | **2.12** |
| **2.3** | **2.8**  у=0 | **2.13**  у=0 |
| **2.4**  у=0 | **2.9**  у=0 | **2.14**  у=0 |
| **2.5**  у=0 | **2.10**  у=0 | **2.15**  у=0 |

* Найти площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке**.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **3.1** | **3.6** | **3.11** |
| **3.2** | **3.7** | **3.12** |
| **3.3** | **3.8** | **3.13** |
| **3.4** | **3.9** | **3.14** |
| **3.5** | **3.10** | **3.15** |

* Построить площадь криволинейной трапеции и вычислить её площадь, использую соответствующие формулы**.**



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **4.1** | **4.2** | **4.3** |
| **4.4** | **4.5** | **4.6** |

**Практическая работа №29** «Вычисление поверхности и объема призмы»

**Цели:** закрепление понятий: прямоугольный параллелепипед, линейные размеры, диагональ, площадь боковой и полной поверхности призмы; содействовать воспитанию интереса к математике и ее приложениям.

***«Окружающий нас мир - это мир геометрии» А.Д.Александров***

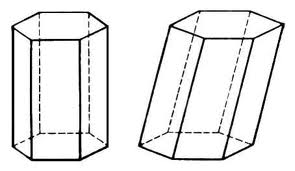
**Оборудование:** модели прямоугольного параллелепипеда, призм, линейки, карандаши, калькулятор.

**Методические указания**

**Призма** — многогранник, две грани которого являются многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммами, имеющими общие стороны с этими многоугольниками.

**Виды призм.**

1. Призма, основанием которой является параллелограмм, называется **параллелепипедом**.
2. **Прямая призма** - это призма, у которой боковые ребра перпендикулярны плоскости основания. Другие призмы называются **наклонными**.
3. **Правильная призма** - это прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник. Боковые грани правильной призмы - равные прямоугольники.



прямая призма наклонная призма

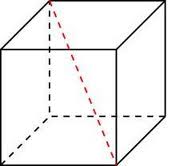
**Свойства призмы:**

* Основания призмы являются равными многоугольниками.
* Боковые грани призмы являются параллелограммами.
* Боковые ребра призмы параллельны и равны.

**Площадь боковой поверхности прямой призмы**: **Sб.п. = P•H,** где P — периметр основания призмы (сумма всех сторон основания), H — высота призмы.

**Площадь полной поверхности призмы** равна сумме площади её боковой поверхности и удвоенной площади основания: **Sп.п. = P•H + 2• Sосн**

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его линейных размеров: **d2 = a2 +b2 +c2**



**Использование призм**: в строительстве, в быту, в технике, в медицине (лечение косоглазия)

**Задание к практической работе: по данным вам моделям найти площадь боковой, полной поверхности,**.

**Пример:** Найти площадь боковой, полной поверхности призмы.

**Ход работы**

1.Для нахождения площади боковой поверхности призмы нужно измерить линейкой следующие элементы призмы: стороны основания, высоту. Подставить значения в формулу для нахождения площади (если призма прямая)

2. Для нахождения площади полной поверхности призмы нужно найти площадь основания призмы (площадь треугольника, прямоугольника, ромба)

Площадь полной поверхности призмы находиться как сумма площадей боковой поверхности и двух оснований.

**Оформление работы**:

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Дано:** АВСС1В1А1 треугольная призма, прямая, правильная  АВ=ВС=АС = 5 см, Н = 10 см  **Найти:** **Sб.п., Sп.п.**  **Решение: Sб.п. = P•H**  Р=5+5+5=15, Н=10  **Sб.п.**= 15•10 = 150 (см2)  Фо́рмула Герона позволяет вычислить площадь треугольника (S) по его сторонам a, в, c:  Sосн =  где p — полупериметр треугольника: р = (а+в+с):2  р= 15:2 =7,5 Sп.п. = P•H +2• Sосн, = 150 + 2•7,7 = 164,4 (см2)  Ответ: Sб.п.= 150см2; Sп.п.=164,4см2 |
| 3. Выполняют задания для самостоятельной работы (тесты, состоящие из двух вопросов и двух задач).  **Задания для самостоятельной работы:**  **Вариант 1** | |

**1**. Сколько ребер у шестиугольной призмы?

Ответ: а)18, б)24, в)12.

**2**.Выберите верное утверждение.

а) призма называется правильной, если ее основания - правильные многоугольники;

б) у треугольной призмы две диагонали;

в) высота призмы равна ее боковому ребру;

**3.Задача**. Найдите длину диагонали прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 2м, 3м, 5м.

**4**. **Задача.** Коллекционер заказал аквариум, имеющий форму правильной четырехугольной призмы. Сколько квадратных метров стекла необходимо для изготовления аквариума, если сторона основания 70 см, а высота 60 см?

**Вариант 2**

**1**.Сколько граней у шестиугольной призмы?

Ответ: а)6, б)8, в)10

**2**. Выберите верное утверждение.

а) площадь полной поверхности призмы называется сумма площадей ее боковых граней и основания;

б) у треугольной призмы нет диагоналей;

в) высота прямой призмы равна ее боковому ребру;

**3**.**Задача.** Найдите длину диагонали прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 3см, 4см, 5см.

**4. Задача** Необходимо изготовить короб с крышкой для хранения картофеля в форме прямой призмы высотой 0,7 м. В основании призмы лежит прямоугольник со сторонами 0,4 м и 0,6 м. Сколько фанеры понадобиться для изготовления короба?

**Вариант 3**

**1**.Сколько граней у четырехугольной призмы?

Ответ: а)6, б)8, в)10

**2**. Выберите верное утверждение.

а) У n – угольной призмы 2 n ребер;

б) площадь полной поверхности призмы называется сумма площадей ее боковых граней;

в) у треугольной призмы три диагонали;

**3**.**Задача.** Сколько необходимо купить листов 8 – волнового шифера размером 1750\*1130 мм на покрытие крыши здания длиной 10 м. Фронтон имеет форму равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой 10 м и катетом 7 м.

**4**. **Задача.** Нужно оклеить обоями комнату, длина которой 6м, ширина 4м, высота 3м, площадь окон и дверей составляет 1/5 всей площади стен. Сколько нужно рулонов обоев для оклейки комнаты, если длина рулона 12 м, а ширина 50 см?

**Практическая работа №28** «Вычисление поверхности и объема пирамиды»

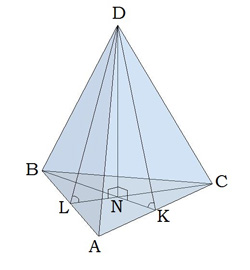
**Цели:** закрепление понятий: пирамида, площадь боковой и полной поверхности пирамиды; воспитание познавательной активности, показать возможность применения пирамиды в различных областях.

**Оборудование:** модели пирамид, таблица с формулами Sб.п., Sп.п., линейки, карандаши, калькулятор.

Методические указания.

**Пирамида** — многогранник, основание которого — многоугольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину. По числу углов основания различают пирамиды треугольные, четырёхугольные и т. д.

**Элементы пирамиды.**



**DN** – высота пирамиды

**DВ, DС, DА** - боковые ребра — общие стороны боковых граней;

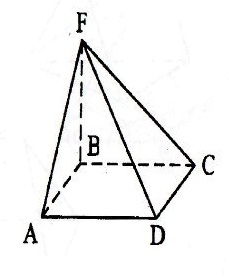
**DВА, DАС, DВС** - боковые грани — треугольники, сходящиеся в вершине пирамиды

**DК, DL - апофема** — высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины [ℓ]; **DN**- высота пирамиды.

**Пирамида называется правильной**, если основанием её является правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания. Тогда она обладает такими свойствами:

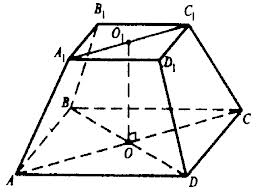
1. боковые ребра правильной пирамиды равны;
2. в правильной пирамиде все боковые грани — равные равнобедренные треугольники;
3. в любую правильную пирамиду можно как вписать, так и описать около неё сферу;

**Прямоугольная пирамида**



Пирамида называется прямоугольной, если одно из боковых рёбер пирамиды перпендикулярно основанию. В данном случае, это ребро и является высотой пирамиды.

**Усечённая пирамида**



Усечённой пирамидой называется многогранник, заключённый между основанием пирамиды и секущей плоскостью, параллельной её основанию.

**Боковая поверхность** — это сумма площадей боковых граней.

Для нахождения боковой поверхности в правильной пирамиде можно использовать формулу:

Sбок = , где Р – периметр основания, ℓ - апофема.



**Полная поверхность** — это сумма площади боковой поверхности и площади основания.

Для нахождения полной поверхности в правильной пирамиде можно использовать формулу:

Sп.п. = +Sосн.



**Задание к практической работе: по данным вам моделям найти площадь боковой, полной поверхности. Выполнить тесты**.

**Пример:** Найти площадь боковой, полной поверхности.

**Ход работы**

1.Для нахождения площади боковой поверхности пирамиды нужно измерить линейкой следующие элементы: апофему, стороны основания, высоту. Подставить значения в формулу для нахождения пощади (если пирамида правильная). Если пирамида наклонная, то боковую поверхность находим из суммы площадей граней.

2. Для нахождения площади полной поверхности пирамиды нужно найти площадь основания пирамиды (площадь треугольника, прямоугольника, ромба)

3. Площадь полной поверхности пирамиды находиться как сумма площадей боковой поверхности и основания.

**Оформление работы:**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Дано: SАВСД – пирамида, АВСД –прямоугольник. АВ=3см, ВС= 6см, Н=10см, ℓ1=10,5см., ℓ2=10,2см , ℓ- апофема. Найти: Sб.п. Sп.п.  Решение.  т.к. пирамида неправильная, то Sб.п. находят как сумму площадей ее боковых граней, т.е. площадей треугольников. S1 = 1/2 ·ℓ1·АВ=1/2·10,5·3=15,75(см2) - это площадь одной грани, а их две одинаковых, т.е  S1,2 =15,75·2=31,5(см2) |
| S3=1/2·ℓ2·ВС= 1/2·10,2·6=30,6 (см2), S3,4=2·30,6=61,2(см2)  Sб.п.= 31,5+61,2 =92,7(см2)  Sосн.= АВ·ВС=3·6=18(см2), Sп.п.= Sб.п+ Sосн.= 92,7+18=110,7 (см2)  2. Выполняют тесты, состоящие из трех вопросов и одной задачи. | |

**Задания для самостоятельной работы:**

**Вариант 1**

**1**. Сколько ребер у шестиугольной пирамиды: а)6; б)12; в)18; г)24;

**2**. Какое наименьшее число граней может иметь пирамида: а)5; б)4 в)10; г)6

**3**. Подтвердите или опровергните следующие утверждения: Да ^ нет

а) Многогранник, составленный из n-треугольников, называется пирамидой; б) Пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник; в) Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется апофемой;

**4**.**Задача.** Крыша башни имеет вид правильной четырехугольной пирамиды, у которой сторона основания равна 12 м, а высота 18 м. Сколько понадобится плиток на покрытие этой крыши, если каждая плитка имеет вид прямоугольника со сторонами 22 см и 18 см.

**Вариант 2**

**1**. Сколько граней у шестиугольной пирамиды: а)6; б)7; в)8; г)10;

**2**. Какое наименьшее число ребер может иметь пирамида: а)6; б)5; в)4; г)7; **3.**  Подтвердите или опровергните следующие утверждения: Да ^ нет а) Высота пирамиды называется высотой грани; б) Площадь боковой поверхности пирамиды равна произведению периметра основания на высоту; в) Пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник;

**4**.**Задачи**. Одно из самых грандиозных сооружений древности – пирамида Хеопса – имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с высотой 150 м и боковым ребром 220 м. Найдите площадь боковой поверхности

**Вариант 3**

**1**. Сколько ребер у четырехугольной пирамиды: а)6; б)12; в) 8

**2**. Какое наименьшее число граней может иметь пирамида: а)5; б)4 в)10; г)6

**3**.Подтвердите или опровергните следующие утверждения: Да ^ нет а)Существует ли четырехугольная пирамида, у которой противоположные боковые грани перпендикулярны к основанию? б)Высота пирамиды, это перпендикуляр, проведённый из вершины к основанию. в)Общая точка боковых граней пирамиды называется вершиной

**4**.**Задача**. Крыша имеет форму пирамиды с квадратным основанием 4,5 м х 4,5 м и высотой 4 м. Сколько листов железа размером 70 см х 140 см нужно для покрытия крыши, если на отходы нужно добавить 10% площади крыши?

**Практическая работа №29**«Вычисление поверхности и объема цилиндра»

1. **Цели:** закрепление понятий: цилиндр, площадь боковой, полной поверхности; способствовать развитию математического мышления, формировать умения анализировать, сравнивать, обобщать.

**Оборудование:** модели цилиндра, тесты, калькулятор, линейки, карандаши.

**Методические указания.**

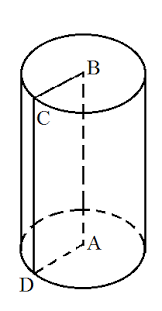
**Цилиндр** — геометрическое тело, образованное двумя кругами, не лежащими в одной плоскости и совмещаемые параллельным переносом, и всеми отрезками параллельных прямых, соединяющих соответствующие точи этих кругов.

Круги, лежащие в параллельных плоскостях, называются основаниями цилиндра, а отрезки, соединяющие соответствующие точки оснований, - образующими цилиндра.

Поверхность, состоящая из образующих, называется боковой поверхностью цилиндра.

Цилиндр прямой круговой может быть получен путем вращения прямоугольника вдоль стороны как оси.

**Элементы цилиндра.**



**R= АD** – радиус цилиндра; **d** – диаметр.

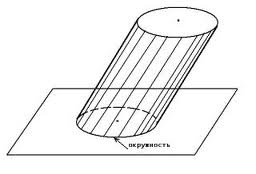
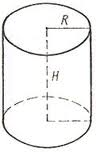
**H = АВ** – высота;

**L =СD** – образующая.

**S = πR 2**- площадь круга. **d = 2R.**

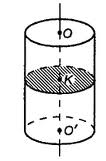
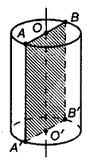
**С** – длина окружности**. С = 2πR**

**Виды цилиндров:**



прямой наклонный

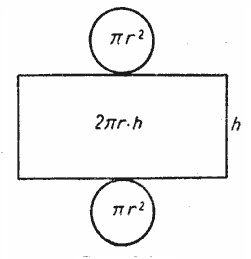
**Сечения цилиндра:**



**осевое сечение сечение плоскостью**

**перпендикулярной оси**

**Площадь боковой поверхности** прямого цилиндра вычисляется по его развёртке. Развёртка цилиндра представляет собой прямоугольник с высотой h (H) и длиной равной длине окружности основания 2πR.



Следовательно, площадь боковой поверхности цилиндра равна площади его развёртки и вычисляется по формуле: **Sб.п.= 2πR•Н**

**Площадь полной поверхности** находиться как сумма боковой поверхности и двух площадей основания (круга), вычисляется по формуле:

**Sп.п.= 2πR•Н+2πR2**

**Использование цилиндров**: в одежде, в быту, в технике: двигатель внутреннего сгорания, на железнодорожном транспорте, на автомобильном транспорте, в архитектуре и строительстве и т.д.

**Задание:** **по** **данным вам моделям найти площадь боковой поверхности, полной поверхности цилиндра**

**Ход работы**:

**1.**а) Для нахождения площади боковой поверхности цилиндра нужно измерить линейкой следующие элементы: диаметр, высоту. Подставить значения в формулу для нахождения площади боковой поверхности цилиндра.

б) Для нахождения площади полной поверхности цилиндра нужно найти площадь основания цилиндра (площадь круга π·R2). Подставить данные в формулу площади полной поверхности или найти как сумму площадей боковой поверхности и двух оснований.

**Пример:** Найти площадь боковой, полной поверхности

**Оформление работы:**

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Дано**: цилиндр, Н=12см, R=3см  **Найти:** Sб.п. Sп.п.  **Решение:** Sб.п.= 2·π·R·Н = 2·π·3·12=72π(см2)  Sп.п.= 2·π·R·Н+2·π·R2 = 72π + 2·π·32 = 72π+18π = =90π (см2) |

2.Выполняют тесты, состоящие из одного вопроса и двух задач.

**Задания для самостоятельной работы:**

**1вариант**

**1.Выберите верное утверждение**.

а) Длина образующей цилиндра называется радиусом цилиндра; б) Цилиндрическая поверхность называется боковой поверхностью цилиндра;

с) Площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле ;

**2.Задача**. Сколько понадобится краски, чтобы покрасить бак цилиндрической формы с крышкой, имеющий диаметр основания 1,25 м и высоту 1,44 м, если на один квадратный метр расходуется 0,25 кг краски (найдите с точностью до 0,1 кг)?

**3.Задача.** 9.Цилиндрический паровой котёл с крышкой имеет диаметр 2 м и длину 10 м. Вычислить полную поверхность котла.

**2 вариант.**

**1.Выберите верное утверждение**.

а) Радиус цилиндра не может равняться высоте цилиндра; б) Площадь полной поверхности цилиндра вычисляется по формуле ;

с) Цилиндр может быть получен в результате вращения прямоугольника вокруг одной из его сторон.

**2. Задача**. Высота ведра, имеющего форму цилиндра, равна 28 см, диаметр дна 20 см. Вычислить, сколько квадратных дециметров оцинкованного железа пошло на изготовление ведра, если отходы составляют 20 % от всего заготовленного железа.

**3.Задача**. Развертка боковой поверхности цилиндра – квадрат со стороной 2. Найдите площадь полной поверхности цилиндра с точностью до 0,001.

**3 вариант.**

**1.Выберите верное утверждение**.

а) Цилиндр может быть получен в результате вращения треугольника вокруг своей стороны;

б) Длина образующей цилиндра называется диаметром цилиндра;

с) Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению площади основания цилиндра на его высоту.

**2.Задача**. Сколько квадратных метров жести израсходовано на изготовление 1 млн. консервных банок диаметром 10 см и высотой 5 см (на швы и отходы добавить 10% материала).

**3.Задача**. Пизанская башня находиться в итальянском городе Пиза. Высота башни составляет 55м. Диаметр основания равен 15 м. Найти площадь боковой и полной поверхности.

**Практическая работа №29** «Вычисление поверхности и объема конуса»

**Цели:** закрепление понятий: конус, площадь полной поверхности конуса, воспитание познавательной активности, показать применение конуса в различных областях, развитие логического мышления.

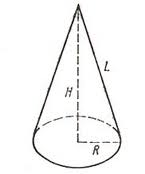
**Оборудование:** модели конуса, линейки, карандаши, калькулятор.

**Методические указания.**

**Конусом** называется тело, которое состоит из круга - основание конуса, точки, не лежащей в плоскости этого круга – вершины конуса, и всех отрезков, соединяющих

вершину конуса с точками основания.

Отрезок, соединяющий вершину и границу основания, называется **образующей конуса (ℓ).**



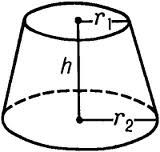
Отрезок, опущенный перпендикулярно из вершины на плоскость основания (а также длина такого отрезка), называется **высотой конуса (Н).**

**R – радиус основания.**

Круговой конус — конус, основание которого является кругом.

**Прямой круговой конус** (часто его называют просто конусом) можно получить вращением прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей катет (эта прямая представляет собой ось конуса)

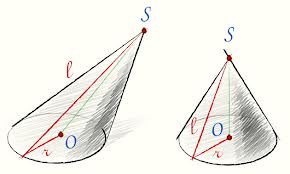
Часть конуса, лежащая между основанием и плоскостью, параллельной основанию и находящейся между вершиной и основанием, называется **усечённым конусом**.



Площадь боковой поверхности усеченного конуса –   
 Sбок = π ℓ (r 1+ r2).

где r1 – радиус верхнего основания, r2 - радиус нижнего основания.

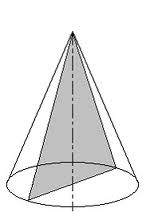
**Виды конусов:**



**наклонный прямой**

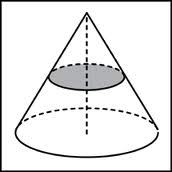
**Боковая поверхность конуса** можно вычислить по формуле: **Sб.п.= πRℓ**, где R — радиус основания, ℓ — длина образующей.

**Полная поверхность конуса** равна сумме площадей боковой поверхности и площади основания: **Sп.п. = πRℓ + πR2** .



**Сечения конуса:**

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называют **осевым сечением** (сечением является равнобедренный треугольник)



Сечение плоскостью перпендикулярной оси конуса:

(сечением является круг).

**Применение конусов.**

Знания о конусе широко применяются в быту, производстве и науке. Например, мы используем ведра, имеющие форму усеченного конуса; крыши старинных замков похожи на конусы; для переливания жидкостей мы берем воронку, которая также имеет форму усеченного конуса. Во время спортивных соревнований, ограждения для движения в автошколах применяют спортивные фишки.

**Задание: по данным вам моделям найти площадь боковой поверхности, полной поверхности.**

**Ход работы:**

1.а) Для нахождения площади боковой поверхности конуса нужно измерить линейкой следующие элементы: диаметр, высоту. Подставить значения в формулу для нахождения площади боковой поверхности конуса . б) Для нахождения площади полной поверхности конуса нужно найти площадь основания конуса площадь круга π·R2). Подставить данные в формулу площади полной поверхности

**Пример:** Найти площадь боковой, полной поверхности. **Оформление работы:**

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Дано**: конус, Н=10см, R=6см, ℓ= 11,6см  **Найти:** Sб.п. Sп.п.  **Решение:** Sб.п.=πRℓ= π•6•11,6 = 69,6π (см2)  Sп.п.=πRℓ + πR2 = π•6•11,6 + π•62 = 105,6π (см2) |

2. Выполняют тесты, состоящие из одного вопроса и двух задач

**Задания для самостоятельной работы:**

**1 вариант**

**1. Выберите верное утверждение**:

а) конус может быть получен в результате вращения равностороннего треугольника вокруг его стороны;

б) прямая, проходящая через вершину конуса и центр его основания, называется осью конуса;

в) разверткой боковой поверхности усеченного конуса является круг;

**2.Задача**. Высота конуса равна15 см, а образующая 16 см. Найдите радиус конуса.

**3.Задача.** Сколько квадратных метров брезента потребуется для сооружения палатки конической формы? Высотой 1,5м и радиусом 2 м?

**2 вариант**

**1.Выберите неверное утверждение**:

а) конус может быть получен в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов;

б) конус называется равносторонним, если его осевое сечение – правильный треугольник.

в) Площадь боковой поверхности конуса может быть вычислена по формуле ;

**2.Задача**. Образующая конуса, равна 8 см, наклонена к плоскости основания под углом 30о. Найдите площадь осевого сечения конуса.

**3.Задача.** Коническая крыша башни имеет диаметр 6 м и высоту 2 м. Сколько листов кровельного железа потребуется для этой крыши, если размер листа 0,7 м х 1,4 м, а на швы и обрезки тратиться 10% от площади крыши?

**3 вариант**

1.**Выберите верное утверждение**

а) сечение конуса, проходящее через ось, есть круг;

б) конус получен в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов;

в) осевым сечением усеченного конуса является прямоугольник.

**2.Задача.** Осевое сечение конуса – правильный треугольник, со стороной 2r . Найти площадь сечения проведенного через две образующие конуса, угол между которыми равен 60

**3.Задача**. **.**Сколько потребуется краски, для того чтобы покрасить пожарное ведро, если на 100см² необходимо затратить 10г? Радиусом 20 см, а высотой 45 см.

**Практическая работа №31** «Преобразование выражений содержащих радикалы»

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

определение корня п-ой степени;

свойства корня;

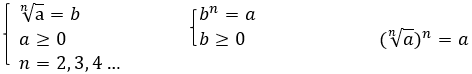
*уметь:*

вычислять выражения, содержащие

***Сведения из теории:***

Корнем n-й степени из неотрицательного числа а называется такое неотрицательное число b, которое при возведении в степень n дает число а.

Приведем математическую запись определения:



Например: , т. к. ; , т. к.



Итак, в рассмотренном случае под корнем стоит строго неотрицательное число, но существует также корень из отрицательного числа – это корень нечетной степени, он существует для любых чисел.



Например: , т.к. ,



Напомним свойства корней n-й степени, которыми мы будем пользоваться при всех преобразованиях:

 при



, при  (теорема 1);



, при  (теорема 2);



, при  (теорема 3);



, при  (теорема 4);



 при  (теорема 5).



Все дальнейшие преобразования и вычисления базируются на определении и свойствах корня n-й степени.

Пример 1 – вычислить:



Разложим подкоренное выражение на более удобные множители и после этого извлечем корень:



Пример 2 – упростить выражение:



Пример 3 – упростить выражение:



**Выполнить тест самостоятельно:**

Тест «Преобразование выражений, содержащих радикалы»

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант 1.  1. Вычислите    2. Вычислите    3. Вычислите    4. Вычислите    5. Выполните действия    6. Выполните действия    7. Упростите выражение    8. Упростите выражение    9. Упростите выражение    10. Упростите выражение | Вариант 2.  1. Вычислите    2. Вычислите    3. Вычислите    4. Вычислите    5. Выполните действия    6. Выполните действия    7. Упростите выражение    8. Упростите выражение    9. Упростите выражение    10. Упростите выражение |
| Вариант 3.  1. Вычислите    2. Вычислите    3. Вычислите    4. Вычислите    5. Выполните действия    6. Выполните действия    7. Упростите выражение    8. Упростите выражение    9. Упростите выражение    10. Упростите выражение | Вариант 4.  1. Вычислите    2. Вычислите    3. Вычислите    4. Вычислите    5. Выполните действия    6. Выполните действия    7. Упростите выражение    8. Упростите выражение    9. Упростите выражение    10. Внесите множитель под знак корня |

**Практическая работа №31** «Преобразование выражений, содержащих степени с рациональным и действительными показателями»

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

основные показательные тождества;

свойства степеней с действительными показателями;

*уметь:*

вычислять степени с действительными показателями.

***Сведения из теории:***

Повторим определения *понятия степени* с натуральным, нулевым, целым отрицательным и рациональным показателями:

*an*= *a* ∙*a* ∙*a*∙…∙*a*; *a-n*=1/(*an*); *a*0=1, *a*≠0; *am/n*=,

*n* раз

*m*Є***Z***, *n*Є***N***, *n*≥2.

Повторим свойства степеней с рациональным показателем:

при любых *х* и *y* справедливы равенства:

*axay*=*ax*+*y*;

*ax/ay*=*ax*-*y*;

(*ax*)*y*=*axy*;

(*ab*)*x*=*axbx*;

(*a*/*b*)*x*=*ax/bx*.

*Степень с действительным показателем*

Свойства степеней с действительным показателем:

1. *ax/y=a(xk)/(yk)*, *a*>0, *y*, *k*Є***N***, *x*Є***Z***.

2. *ax*>0, *a*>0, *x*Є***R*** (любая степень положительного числа положительна).

3. *ax*>1 при *a*>1, *x*>0.

4. *ax*<1 при *a*>1, *x*<0.

5. 1*x*=1 (любая степень единицы равна единице).

6. *ax*<1 при 0<*a*<1, *x*>0.

7. *ax*>1 при 0<*a*<1, *x*<0.

8. Если *a*>1, *a*≠1, то для любого положительного числа *b* существует единственное действительное число *х* такое, что *ах*=*b* при *b*>0.

9. Любая положительная степень нуля равна нулю.

Кроме перечисленных свойств важно отметить три свойства, на которых основано решение простейших показательных уравнении и неравенств:

10. Если *ax*=*ay*, то *x*=*y* при *a*>0, *x*, *y*≠1.

11. Если *ax*<*ay*, то *x*<*y* при *a*>0.

12. Если *ax*<*ay*, то *x*>*y* при 0<*a<*1.

Правила действия над степенями с действительным показателем выражаются формулами (тождествами):

13. *a*α*a*β=*a*α+β.

14. *a*α ׃*a*β=*a*α-β.

15. (*a*α)β=*a*αβ.

16. (*ab)*α=*a*α*b*α при *a*>0, *b*>0.

17. |*ab*|α=|*a|*α |*b|*α при *ab*>0.

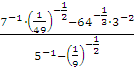
18. (*a/b)*α=*a*α /*b*α при *a*>0, *b*>0.

19. |*a/b|*α=|*a|*α /|*b|*α при *ab*>0.

Формулы, обратные формулам 1-7, так же верны.

***Пример***

Вычислите: .



Решение:

упростим заданное выражение, использую свойства степеней:



.

***Пример***

Вычислите: .

Решение:

упростим заданное выражение, использую свойства степеней:



***Задания для самостоятельного решения:***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1 вариант**  №1. Вычислите:  1) ;  2) .  №2. Упростите:  . | **2 вариант**  №1. Вычислите:  1) ;  2) .  №2. Упростите:  . | **3 вариант**  №1. Вычислите:  1) ;  2) .  №2. Упростите:  . |
| **4 вариант**  №1. Вычислите:  1) ;  2) .  №2. Упростите:  . | **5 вариант**  №1. Вычислите:  1) ;  2) .  №2. Упростите:  . | **6 вариант**  №1. Вычислите:  1) ;  2) .  №2. Упростите:  . |
| **7 вариант**  №1. Вычислите:  1) ;  2) .  №2. Упростите:  . | **8 вариант**  №1. Вычислите:  1) ;  2) .  №2. Упростите:  . | **9 вариант**  №1. Вычислите:  1) ;  2) .  №2. Упростите:  . |

***Контрольные вопросы:***

* Перечислите основные показательные тождества.
* Перечислите свойства степеней с действительными показателями.

**Практическая работа №39** «Решение показательных уравнений и неравенств»

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

свойства степеней;

способы решения показательных уравнений;

*уметь:*

решать уравнения, содержащие переменную в показателе степени.

***Сведения из теории:***

Уравнение, содержащее переменную в показателе, называется *показательным*.

При решении показательных уравнений вида *af*(*x*)=*ak*(*x*) (где *a*>0, *a*≠0) используется следующее свойство: (*af*(*x*)=*ak*(*x*))→(*f*(*x*)=*k*(*x*)).

Преобразование показательного уравнения к виду *af*(*x*)=*ak*(*x*) выполняется многими способами. Рассмотрим некоторые способы.

***Пример***

Решите уравнение: .

Решение:

по определению нулевого показателя степени: 1=20, получим:

.

По свойству (*af*(*x*)=*ak*(*x*))→(*f*(*x*)=*k*(*x*)), получаем обычное квадратное уравнение, корни которого вычисляем через дискриминант:

,

*х*1=3, *х*2=4.

Ответ: 3, 4.

***Пример***

Решите уравнение: .

Решение:

приведем обе части уравнения к основанию 2:

,





По свойству (*af*(*x*)=*ak*(*x*))→(*f*(*x*)=*k*(*x*)), получаем 6*х*=7 и *х*=7/6.

Ответ: 7/6.

***Пример***

Решите уравнение: .

Решение:

разделив обе части уравнения на одно и то же число 5*х*-2, получим:



Ответ: 2.

***Пример***

Решите уравнение: .

Решение:

вынесем общий множитель 2*х* за скобку, получим:



Ответ: 4.

***Задания для самостоятельного решения:***

Решите уравнения:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1 вариант**  1) ;  2) . | **2 вариант**  1) 23*х*=5*х*; | **3 вариант**  1) 3*х*=7*х*/2;  2) . |
| **4 вариант**  1) 5*х*-3=23*-х*;  2) . | **5 вариант**  1) ;  2) . | **6 вариант**  1) 3*х*-5=81;  2) 0,01=10-*х*. |
| **7 вариант**  1) ;  2) . | **8 вариант**  1) ;  2) | **9 вариант**  1) ;  2) 1000=100*х*. |

***Контрольные вопросы:***

1. Что называется показательным уравнением?
2. Запишите свойство, которое используют при решении показательных уравнений.

**Практическая работа №33** «Понятие логарифма»

**Цели:** закрепление понятий: логарифм, свойства логарифма, основного логарифмического тождества.

**Справочный материал**

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

определение логарифма;

свойства логарифмов;

*уметь:*

вычислять логарифмы по любому основанию.

***Сведения из теории:***

Логарифмом числа *b* по основанию *а* называется показатель степени (*х*), в которую нужно возвести основание *а*, чтобы получить число *b*, т.е. *logab*=*x* → *ax*=*b*.

При работе с логарифмами применяются следующие их свойств, вытекающие из свойств показательной функции:

1. *аlogab*=*b* (где *b*>0, *a*>0 и *a*≠0) называют *основным логарифмическим тождеством*.

При любом *a*>0 (*a*≠0) и любых положительных *х* и *у* выполняются равенства:

2. *loga*1=0.

3. *logaа*=1.

4. Логарифм произведения равен сумме логарифмов: *logaxу*=*logax*+*logaу*.

5. Логарифм частного равен разности логарифмов: *loga*(*x/у*)=*logax*-*logaу*.

6. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени: *logaxk*=*klogax*.

Основные свойства логарифмов широко применяются в ходе преобразования выражений, содержащих логарифмы. Среди них формула перехода к новому основанию: *logax*=*logbx/logba*. Эта формула верна, если обе ее части имеют смысл, т.е. при *x*>0, *a*>0 и *a*≠0, *b*>0 и *b*≠1).

По правилу логарифмирования степени и основному логарифмическому тождеству получаем:

*logbx*=*logb*(*аlogaх*), откуда *logbx*=*logax*·*logba*. Эту формулу так же можно использовать для упрощения выражений.

С помощью формулы перехода можно найти значение логарифма с произвольным основанием *а*, имея таблицы логарифмов, составленные для какого-нибудь одного основания *b*. Наиболее употребительны таблицы десятичных и натуральных логарифмов (*десятичными* называют логарифмы по основанию 10 и обозначают *lg*, а *натуральными* логарифмами называют логарифмы по основанию *е*~2,72 и обозначают *ln*).

***Пример***Вычислите *log*0,37.

Решение:

воспользуемся формулой перехода к новому основанию и перейдем к основанию 10:

*logax*=*logbx/logba*

*log*0,37=*log*107*/log*100,3=*lg*7/*lg*0,3.

Пользуясь калькулятором или специальными таблицами, например, таблицей В.М. Брадиса, находим значение *lg*7=0,8451.

Используя 5 и 3 свойства логарифмов, вычисляем

*lg*0,3=*lg*(3/10)=*lg*3-*lg*10=0,4771-1=-0,5229.

Итак, *log*0,37=0,8451/(-0,5229)=-1,6162.

***Пример*** Вычислите: (*lg*72-*lg*9)/(*lg*28-*lg*7).

Решение:

используя 5 и 6 свойства логарифмов, вычисляем

*lg*72-*lg*9=*lg*(72/9)=*lg*8=*lg*23=3*lg*2;

*lg*28-*lg*7=*lg*(28/7)=*lg*4=*lg*22=2*lg*2.

Итак,

(*lg*72-*lg*9)/(*lg*28-*lg*7)=(3*lg*2)/(2*lg*2)=3/2=1,5.

***Задания для самостоятельного решения:***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1 вариант**  1) Вычислите *log*0,25.  2) Дано: . Вычислите: . | **2 вариант**  1) Вычислите *log*3 0,1.  2) Вычислите: . | **3 вариант**  1) Вычислите *log*0,51.  2) Дано: . Вычислите: . |
| **4 вариант**  1) Вычислите *log0*,74.  2) Вычислите: | **5 вариант**  1) Вычислите *log*0,29.  2) Вычислите: . | **6 вариант**  1) Вычислите *log*0,310.  2) Вычислите: |
| **7 вариант**  1) Вычислите *log*0,370.  2) Вычислить: | **8 вариант**  1) Вычислите *log*0,320.  2) Вычислите: . | **9 вариант**  1) Вычислите *log*0,330.  2) Вычислите: |

***Контрольные вопросы:***

* Дайте определение логарифма числа.
* Перечислите свойства логарифмов.

**Практическая работа №33** «Преобразование выражений, содержащих логарифмы»

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

определение логарифма;

свойства логарифмов;

*уметь:*

решать уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма.

***Сведения из теории:***

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма или в основании логарифма, называется *логарифмическим*.

Рассмотрим простейшее логарифмическое уравнение: *logax*=*b*.

Логарифмическая функция возрастает (или убывает) на промежутке (0; +∞) и принимает на этом промежутке все действительные значения.

Теорема о корне: пусть функция *f* возрастает (убывает) на промежутке *I*, число *а* – любое из значений, принимаемых *f* на этом промежутке. Тогда уравнение *f*(*x*)=*a* имеет единственный корень в промежутке *I*.

По вышесказанной теореме следует, что для любого *b* данное уравнение имеет, и притом только одно, решение.

Из определения логарифма числа следует, что таким числом является *ab*.

***Пример***

Решите уравнение: *log*2(*х*2+4*х*+3)=3.

Решение:

данному уравнению удовлетворяют те значения *х*, для которых выполнено равенство: *х*2+4*х*+3=23.

Получаем обычное квадратное уравнение *х*2+4*х*+3=8 или *х*2+4*х*-5=0, корни которого вычисляем с помощью дискриминанта: *х*1=1; *х*2=-5.

***Пример***

Решите уравнение: *log*5(2*х*+3)=*log*5(*х+*1).

Решение:

данное уравнение определено для тех значений *х*, при которых выполнены неравенства: 2*х*+3>0 и *х+*1>0 (это следует из определения логарифма).

Для этих *х* данное уравнение равносильно уравнению: 2*х*+3=*х+*1, из которого находим *х*=-2.

Выполняя проверку, убеждаемся, что *х*=-2 не удовлетворяет неравенству *х+*1>0. Следовательно, данное уравнение корней не имеет.

***Пример***

Решите уравнение: *log2*5*х*-*log*5*х*2-3=0.

Решение:

данное уравнение, воспользовавшись свойством степени логарифма, можно переписать в виде: (*log*5*х*)2-2*log*5*х*-3=0.

Сделаем замену переменной: *t*=*log*5*х*, тогда наше уравнение перепишется в виде: *t*2-2*t*-3=0, корни которого вычислим через дискриминант: *t*1=3, *t*2=-1.

Вернемся к исходной переменной: *log*5*х*=3 или *log*5*х*=-1.

Используя определение логарифма получаем корни исходного уравнения: *х*1=53=125, *х*2=5-1=1/5=0,2.

***Задания для самостоятельного решения:***

Решите уравнение:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1 вариант**  1) ; | **2 вариант**  1) ; | **3 вариант**  1) ;  2) . |
| **4 вариант**  1) ;  2) . | **5 вариант**  1) ;  2). | **6 вариант**  1) log2(2*x*-1)=4; |
| **7 вариант**  1) log3(*x*-12)=2; | **8 вариант**  1) log*x*16-log*x*2=1/2; | **9 вариант**  1) log3(*x*+8)=-2; |

***Контрольные вопросы:***

1. Что называется логарифмическим уравнением?
2. Перечислите способы решения уравнений, содержащих переменную под знаком логарифма или в основании логарифма.

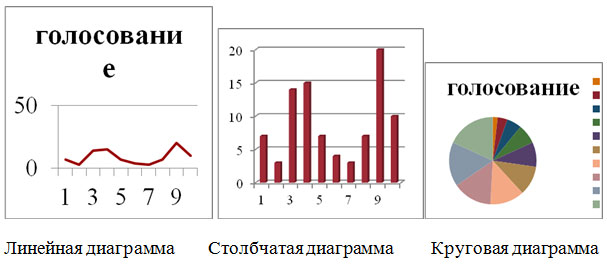
**Практическая работа №35** «Статистическая обработка данных»

**Цель:** сформировать умение оформления статистических данных

**Теоретические сведения к практической работе**

**Статистическая информация – это числовые данные о массовых явлениях.   
Элементы математической статистики мы будем изучать на примере нашей гимназии**

В финал конкурса «Мисс гимназии» вышли 10 школьниц, за которых болели и голосовали 90 гимназистов. Отразите результаты голосования нагляднее табличного.



**Числовые характеристики статистических рядов**

Объем измерения – количество источников информации (число опрошенных или число голосов)  –   90

Размах измерения – разница между наибольшим и наименьшим значениями результатов измерений: 20 – 3 = 17

Мода измерения – наиболее часто встречающийся результат – 9

Среднее значение – частное от деления суммы всех результатов измерения на объем измерения



Медиана **–** это число, которое разделяет набор  чисел на две равные по численности части.

Важно: Медиана находится в вариационном ряду, т.е. в наборе чисел, записанных в порядке возрастания!

Средних вариант две №45 и № 46

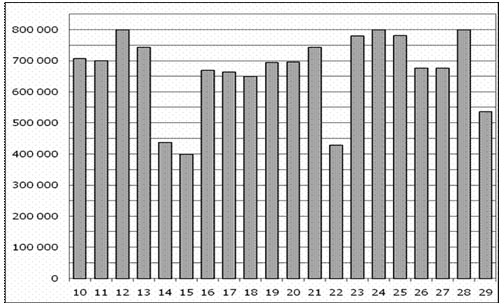


**Задача.**Вы решили в свободное время собраться классом и организовать некоторое классное мероприятие, но еще не решили, что именно. Было бы целесообразным учесть мнение большинства учащихся класса, а для этого нужно провести опрос: «Как бы вы хотели провести свободное время классом?»  и предложить варианты ответов. Результаты нужно занести в таблицу.

**Интерпретация статистической информации**

Обманчивое впечатление, например, может возникать из-за неполноты статистической информации

Прототип В 2



На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день.

Определите по диаграмме, какого числа количество посетителей сайта РИА Новости было наименьшим за указанный период.

Ответьте на контрольные вопросы:

1. Основные задачи статистики.

2. Виды диаграмм распределения и их построение.

3. Объем измерения.

4. Понятие размаха измерения.

5. Мода измерения.

6. Среднее арифметическое

**Практическая работа №35**«Представление данных в таблицу»

**Цель:** сформировать умение представления данных в табличном виде

# Представление данных в табличной форме

Таблицы - удобная для анализа и обработки форма представления информации.Таблициы, в которых отражается одно свойство, характеризующее два или более объектов, называются таблицами типа "объект - объект".

Таблицы, в которых отражаются несколько свойств объекта, а все объекты принадлежат одному множеству, называются таблицами вида "объект - свойство".

Комбинирование в одной таблице нескольких таблиц вида "объект - объект" и "объект - свойство" позволяет построить таблицы более сложного вида, например тиаблицы "объекты - свойства - объекты".

Таблица характеризуется

* названием (а если таблиц несколько, то ещё и номером)
* количеством столбцов и их названиями (заголовками столбцов)
* количеством строк и их названиями (заголовками строк)
* содержимым ячеек, находящихся на пересечении столбцов и строк.

В случае многоуровневых заголовков строк и столбцов уровни заголовков стобцов называются ярусами, уровни заголовков строк - ступенями.

Основные элементы таблицы:

* записи - строки таблицы, которые могут содержать данные разного типа, но относящиеся чаще всего к одному объекту
* поля - столбцы таблицы, содержащие, как правило,данные одного типа
* реквизиты - конкретные значения, находящиеся в ячейках таблицы

Этапы приведения к табличному виду:

1. анализ информации и выделение объектов, о которых идёт речь
2. выделение свойств объектов и (или) отношений между ними.
3. определение того, можно ли объекты объединить в некоторые подмножества, и в зависимости от этого определение количества уровней и ступеней в заголовках
4. определение общего количества столбцов и порядка их расположения
5. определение наименований столбцов и типа данных, которые там будут распологаться
6. выбор порядка размещения строк и определение названия каждой строки таблицы
7. занесение в ячейки таблицы реквизитов - данных (построчно или по столбцам)

**Самостоятельно:**

Составить таблицу данных обучающихся группы по вкусовым предпочтениям; по увлечениям, можно предложить свой вариант опроса.

**Практическая работа №35** «Построение диаграмм. Организационные диаграммы»

**Цель:** сформировать умение составлять диаграммы

Диаграмма – это графическое представление табличных данных. Визуализация данных с помощью диаграмм помогает увидеть закономерности, тренды, отношения и структуры данных, которые сложно увидеть при изучении числовых значений таблицы.

Диаграммы бывают столбчатые, круговые, гистограммы.

**Линейные диаграммы для характеристики динамики применяют в следующих случаях:**

* если количество уровней ряда динамики достаточно велико. Их применение подчеркивает непрерывность процесса развития в виде непрерывной линии;
* с целью отображения общей тенденции и характера развития явления;
* при необходимости сравнения нескольких динамических рядов;
* если нужно сопоставить не абсолютные уровни явления, а темпы роста.

При изображении динамики с помощью линейной диаграммы на ось абсцисс наносят характеристики времени (дни, месяцы, кварталы, годы), а на оси ординат — значения показателя (пассажирские перевозки в России).

**Перевозка пассажиров транспортом общего пользования в России**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Годы | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 |
| Млн.чел. | 47885 | 48114 | 46283 | 45037 | 45412 | 45817 |



**Самостоятельно:**

Составить диаграмму по результатам составления таблицы из пр.р.43

**Практическая работа №45** «Решение практических задач с применением вероятностных методов»

**Цель:** сформировать умение решать задачи на нахождение вероятностей

**Теоретические сведения к практической работе**

*Классическое определение вероятности*

Раздел математики, изучающий закономерности случайных событий, называется теорией вероятностей.

Вероятностью Р(А) события А в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m, благоприятствующих событию А, к числуn всех исходов испытания.



*Пример 1*: В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.



Аксиомы вероятностей:

Каждому событию А поставлено в соответствие неотрицательное число Р(А), называемое вероятностью события А.

Если события А1, А2 … попарно несовместны, то Р(А1+А2+…)=Р(А1)+Р(А2)+…

Свойства вероятностей:

Вероятность невозможного события равна нулю Р=0.

Вероятность достоверного события равна единице Р=1.

Вероятность произвольного случайного события А заключается между 0 и 1: 0<Р(А)<1.

*Пример 2*: Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

*Решение:* Найдем количество чисел от 1 до 34, кратных трем. Это числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Всего таких чисел 11. Таким образом, искомая вероятность 

События А и В называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События А и В называются независимыми, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей слагаемых без вероятности произведения: Р(А+В)=Р(А)+Р(В)-Р(АВ)

*Пример 3*: Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

*Решение*: Т.к. события совместны, то 

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых: Р(А+В)=Р(А)+Р(В).

Р(А)+Р()=1



Условная вероятность – вероятность одного события, при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность произведения событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: Р(АВ)=Р(А)∙Р(А/В) или Р(ВА)=Р(А)∙Р(В/А)

Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению вероятностей сомножителей: Р(АВ)=Р(А)∙Р(В).

*Пример 4*: В двух коробках лежат ручки разного цвета. В первой коробке – 4 красных и 6 черных, во второй – 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимают по одной ручки. Найти вероятность, что обе ручки красные.

*Решение*: Найдем вероятности вытащить красную ручку из каждой коробки



Тогда вероятность того, что обе ручки красные: 

**Содержание практической работы**

**Задание 1.** Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1. В коробке 4 красных, 5 зеленых, 8 желтых, 7 белых и 1 черный шар. Найти вероятность вытащить: красный шар; синий шар; белый шар; цветной шар; или зеленый или белый шар; не красный шар; шар одного из цветов светофора.

2. В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – девочка, если известно, что в семье есть дети обоего пола?

3. Мастер, имея 10 деталей, из которых 4 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

4. В одном ящике 3 белых и 7 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 8 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

5. Издательство отправило газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе - 0,7, в третье - 0,85. Найти вероятность следующих событий:

а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

6. В первой урне находятся 12 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 10 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными? Какова вероятность, что оба шара окажутся белыми?

7. В партии из 25 деталей находятся 8 бракованных. Вынимают из партии наудачу две детали. Определить, какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными.

8. Подброшены две игральные кости. Найти вероятность события A того, что выпадет хотя бы одна шестерка.

9. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, большее 4.

10. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, не меньшее 2 и не большее 5.

**Практическая работа №35**«Формулы числа перестановок, сочетаний, размещений»

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

- определение соединений, их видов;

- определение вероятности;

- теоремы сложения, умножения вероятностей;

*уметь:*

* по условию задачи различать виды соединений;
* вычислять разные виды соединений;
* вычислять вероятность событий.

***Сведения из теории:***

*Соединения, их виды*

Группы, составленные из каких – либо элементов, называются *соединениями*.

Различаю три основных вида соединений: *размещения, перестановки и сочетания*.

*Размещениями* из *n* элементов по *m* в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число размещений из *n* элементов по *m* обозначается и вычисляется по формуле:

.

*Перестановками* из *n* элементов называются такие соединения из всех *n* элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов.

Перестановки представляют частный случай размещений из *n* элементов по *n* в каждом.

Число всех перестановок из *n* элементов равно произведению последовательных чисел от 1 до *n* включительно:

,

*n*!-читается «*n*-факториал», причем 0!=1 и 1!=1.

Используя приведенные выше определения имеем формулы:

,

при решении задач часто используется равенство:

.

*Сочетаниями* из *n* элементов по *m* в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из *n* элементов по *m* обозначается и вычисляется по формуле:

,

которую можно записать также в виде



или

.

Кроме того, при решении задач используются следующие формулы, выражающие основные свойства сочетаний:

, 

***Пример***

Найти число размещений из 10 элементов по 4.

Решение:

по формуле :

.

***Пример*** Решить уравнение: .

Решение:

используя формулу для вычисления числа размещений имеем:

.

Разделим обе части на одинаковые выражения, получим:

,

и решим получившееся квадратное уравнение: .

***Пример***

Решите систему: .

Решение:

решим второе уравнение:



.

Т. к. , то –11 не удовлетворяет условию задачи. Подставив *х*=12 в первое уравнение системы, получим

.

Используя основное свойство сочетаний, имеем:

,

тогда

.

Ответ: *х*=12, *у*=5.

***Пример***

Сколькими способами из восьми кандидатов можно выбрать три лица на три должности?

Решение:

условию задачи соответствуют размещения 3 из 8, имеем:

.

*Случайные события*

Изучение каждого явления в порядке наблюдения или производства опыта связано с осуществлением некоторого комплекса условий (испытаний). Всякий результат или исход испытания называется *событием*.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется *случайным*.

В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют *достоверным*, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти, *невозможным*.

События называются *несовместными*, если каждый раз возможно появление только одного из них. События называются *совместными*, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

События называются *противоположными*, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

Вероятность события рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

*Классическое определение вероятности.*

Вероятностью события *А* называется отношение числа благоприятных исходов *m*, к числу всех возможных исходов *n*:

.

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, т. е. .

Невозможному событию соответствует вероятность *Р*(*А*)=0, а достоверному – вероятность *Р*(*А*)=1.

***Пример***

В лотерее из 1000 билетов 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Какова вероятность, что этот билет выигрышный?

Решение:

количество благоприятных событий, удовлетворяющих условию задачи *m*=200.

Число всех возможных вариантов *n*=1000.

По определению вероятности: *Р*(*А*)=200/1000=0,2.

***Пример***

Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что этот шар черный?

Решение:

общее число шаров *m*=8, из них черных *n*=3, по определению: *Р*(*А*)=3/8=0,375.

***Пример***

Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 черных шара, вынимают наудачу два шара. Найти вероятность того, что оба шара окажутся черными?

Решение:

общее число возможных случаев *n* равно числу сочетаний из 20 (12+8) элементов по два:

;

число благоприятных исходов *m* равно числу сочетаний из 8 элементов по два:

.

По определению: *Р*(*А*)=28/190=0,147.

***Пример***

В партии из 18 деталей находятся 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Какова вероятность того, что из этих 5 деталей две окажутся бракованными?

Решение:

число всех равновозможных независимых исходов *n* равно числу сочетаний из 18 по 5:

.

Подсчитаем число благоприятных исходов *m*. Среди 5 взятых наугад деталей должно быть 3 качественных и 2 бракованных. Число способов выборки двух бракованных деталей из 4 имеющихся бракованных равно числу сочетаний из 4 по 2:

.

Число способов выборки трех качественных деталей из 14 имеющихся равно числу сочетаний из 14 по 3:

.

Любая группа качественных деталей может комбинироваться с любой группой бракованных, поэтому общее число комбинаций *m* равно:

,

по определению: *Р*(*А*)=2184/8568=0,255.

***Задания для самостоятельного решения:***

Решить следующие задачи, используя определение сочетаний, их видов:

|  |  |
| --- | --- |
| **1 вариант**   1. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 8, 9 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр? 2. Из 6 открыток надо выбрать 3. Сколькими способами это можно сделать? 3. Решите уравнение: . | **2 вариант**   1. Сколькими способами могут разместиться 5 человек вокруг круглого стола? 2. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал семи различных цветов? 3. Решите уравнение: . |
| **3 вариант**   1. Из 10 кандидатов нужно выбрать 3 человека на конференцию. Сколькими различными способами это можно сделать? 2. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр? 3. Решите уравнение: . | **4 вариант**   1. Бригадир должен отправить на работу бригаду из 3 человек. Сколько таких бригад можно составить из 8 человек? 2. На собрании должны выступить 5 человек (*А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д*). Сколькими способами их можно разместить в списке выступающих, если *А* должен выступать первым? 3. Решите уравнение: . |
| **5 вариант**   1. Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг? 2. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «журнал»? 3. Решите уравнение: . | **6 вариант**   1. Сколькими способами можно составить список из 6 человек? 2. Сколькими способами собрание, состоящее из 18 человек, может из своего состава выбрать председателя собрания и секретаря? 3. Решите уравнение: . |
| **7 вариант**   1. Среди перестановок из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сколько таких, которые не начинаются цифрами 3 или 5? 2. Из города А в город В ведут 6 дорог, а из города В в город С –3 дороги. Сколькими способами можно попасть из города А в город С? 3. Решите систему: . | **8 вариант**   1. В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий сыграно в этом турнире? 2. Имеется 8 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну перчатку на правую руку так, чтобы эти перчатки были разных размеров? 3. Решите систему: . |
| **9 вариант**  1) Группа учащихся изучает семь учебных дисциплин. сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот учебный день должно быть четыре различных урока?  2) Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз?  3) Вычислить: . | |

***Контрольные вопросы:***

* 1. Дайте определение соединения, их виды?
  2. Приведите формулы для вычисления разных видов соединений.
  3. Дайте определение случайного события, их виды. Приведите примеры.
  4. Дайте классическое определение вероятности.

**Практическая работа №36** «Решение простейших систем уравнений с двумя неизвестными»

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

* способы решения уравнений;

*уметь:*

* решать уравнения различными способами.

***Сведения из теории:***

*Метод разложения на множители*

Суть данного метода в том, чтобы путем равносильных преобразований представить левую часть исходного уравнения, содержащую неизвестную величину в какой-либо степени, в виде произведения двух выражений, содержащих неизвестную величину в меньшей степени. При этом справа от знака равенства должен оказаться ноль. Проще всего уяснить эту идею на конкретном примере.

***Пример 83.***

Решите уравнение методом разложения на множители: .

Решение:

осуществим разложение на множители (представим исходное выражение в виде произведения). Для этого вынесем переменную  за скобки:

.

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

Следовательно,

 или .

Из последнего уравнения получаем:

 или .

Ответ:  и .

***Задача для самостоятельного решения №1.*** Решите уравнение методом разложения на множители: .

*Метод замены переменной*

Суть данного метода в том, чтобы удачным образом заменить сложное выражение, содержащее неизвестную величину, новой переменной, в результате чего уравнение принимает более простой вид. Далее полученное уравнение решается относительно новой переменной, после чего происходит возврат к исходной переменной. Все эти идеи проще осознать на конкретном примере.

***Пример***

Решите уравнение методом замены переменной: .

Решение:

такие уравнения называются биквадратными. Перепишем его в виде:

.

Введем новую переменную .Тогда исходное уравнение примет следующий простой вид:

.

Решая полученное квадратичное уравнение, получаем, что:

 или .

Возвращаемся теперь к старой переменной (обратная замена):

 или .

Решений у первого уравнения нет, поскольку не существует такого действительного числа, квадрат которого был бы отрицателен. Второе уравнение имеет два корня .

Ответ: .

***Задача для самостоятельного решения №2.*** Решите уравнение методом замены переменной: .

***Пример***

Решите уравнение методом замены переменной: .

Решение:

обращаем внимание на то, что  не является корнем данного уравнения. Следовательно, без потери или приобретения лишних корней можно разделить числитель и знаменатель обеих дробей на. Тогда уравнение принимает вид:

.

Введем новую переменную: . Тогда уравнение примет вид:

.

Выполнив элементарные преобразования: приведем дроби к общему знаменателю, приведем подобные слагаемые, получим:

.

Дробь равна нулю, если нулю равен ее числитель, а знаменатель при этом не равен нулю. То есть уравнение равносильно следующей системе:

.

Решив первое уравнение системы, имеем: *t*=16 или *t*=9.

Переходя к обратной подстановке, получаем:

1. , что при  равносильно уравнению , решая которое, получаем  или .

2.  что при  равносильно уравнению , у которого решений нет, поскольку его дискриминант отрицателен.

Ответ: , .

***Задача для самостоятельного решения №3.*** Решите уравнение методом разложения на множители: .

***Контрольные вопросы:***

1. В чем суть решения уравнения методом разложения на множители?
2. В чем суть решения уравнения методом замены переменной?

**Практическая работа №36**«Решение систем неравенств с одной переменной»

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

- способы решения неравенства с двумя переменными и их систем;

*уметь:*

* изображать на координатной плоскости множества решений неравенства с двумя переменными и их систем.

***Сведения из теории:***

***Решение неравенства с двумя переменными***, а тем более ***системы неравенства с двумя переменными***, представляется достаточно сложной задачей. Однако есть простой алгоритм, который помогает легко и без особых усилий решать на первый взгляд очень сложные задачи такого рода.

Пусть мы имеем неравенство с двумя переменными одного из следующих видов:

***y* > *f*(*x*); *y* ≥ *f*(*x*); *y* < *f*(*x*); *y* ≤ *f*(*x*).**

Для изображения множества решений такого неравенства на координатной плоскости поступают следующим образом:

**1.** Строим график функции *y* = *f*(*x*), который разбивает плоскость на две области.

**2.** Выбираем любую из полученных областей и рассматриваем в ней произвольную точку. Проверяем выполнимость исходного неравенства для этой точки. Если в результате проверки получается верное числовое неравенство, то заключаем, что исходное неравенство выполняется во всей области, которой принадлежит выбранная точка. Таким образом, множеством решений неравенства – область, которой принадлежит выбранная точка. Если в результате проверки получается неверное числовое неравенство, то множеством решений неравенства будет вторая область, которой выбранная точка не принадлежит.

**3.** Если неравенство строгое, то границы области, то есть точки графика функции *y* = *f*(*x*), не включают в множество решений и границу изображают пунктиром. Если неравенство нестрогое, то границы области, то есть точки графика функции *y* = *f*(*x*), включают в множество решений данного неравенства и границу в таком случае изображают сплошной линией.

***Пример***

**Какое множество точек задается неравенством *x·y*≤4?**

**Решение:**

1) строим график уравнения *x·y*=4. Для этого сначала преобразуем его. Очевидно, что *x* в данном случае не обращается в нуль, т. к. иначе мы бы имели 0·*y*=4, что неверно. Значит, можем разделить наше уравнение на *x*. Получим: *y*=4/*x*. Графиком данной функции является гипербола. Она разбивает всю плоскость на две области: ту, что между двумя ветвями гиперболы и ту, что снаружи их.

2) выберем из первой области произвольную точку, пусть это будет точка (4; 2). Проверяем неравенство: 4·2≤4 – неверно.

Значит, точки данной области не удовлетворяют исходному неравенству. Тогда можем сделать вывод о том, что множеством решений неравенства будет вторая область, которой выбранная точка не принадлежит.

3) т. к. неравенство нестрогое, то граничные точки, то есть точки графика функции *y*=4/*x*, рисуем сплошной линией.

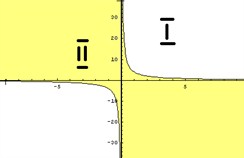


Рисунок 29. График функции *y*=4/*x*

Закрасим множество точек, которое задает исходное неравенство цветом.

***Задача для самостоятельного решения №1.* Какое множество точек задается неравенством *x·y*≤-6?**

***Пример***

**Изобразить область, заданную на координатной плоскости системой .**

**Решение:**

строим графики всех функций:

*y*=*x*2+2 – парабола, *y*+*x*=1 – прямая, *x*2+*y*2=9 – окружность.

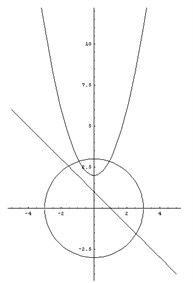


Рисунок 30. Графики функций *y*=*x*2+2, *y*+*x*=1, *x*2+*y*2=9

Теперь разбираем каждое неравенство в отдельности:

1) *y*>*x*2+2.

Берем точку (0; 5), которая лежит выше графика функции. Проверяем неравенство: 5 > 02 + 2 – верно.

Следовательно, все точки, лежащие выше данной параболы, удовлетворяют первому неравенству системы. Закрасим их желтым цветом.

2) *y*+*x*>1.

Берем точку (0; 3), которая лежит выше графика функции. Проверяем неравенство: 3 + 0 > 1 – верно.

Следовательно, все точки, лежащие выше прямой, удовлетворяют второму неравенству системы. Закрасим их зеленой штриховкой.

3) *x*2+*y*2≤9.

Берем точку (0; -4), которая лежит вне окружности. Проверяем неравенство: 02 + (-4)2 ≤ 9 – неверно.

Следовательно, все точки, лежащие вне окружности, не удовлетворяют третьему неравенству системы. Тогда можем сделать вывод о том, что все точки, лежащие внутри окружности, удовлетворяют третьему неравенству системы. Закрасим их фиолетовой штриховкой.

Не забываем о том, что если неравенство строгое, то соответствующую граничную линию следует рисовать пунктиром. Получаем следующую картинку:

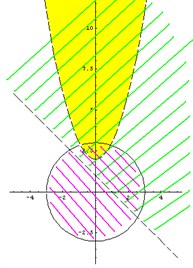


Рисунок 31. Решения неравенств *y*>*x*2+2, *y*+*x*>1, *x*2+*y*2≤9

Искомая область – это область, где все три раскрашенных области пересекаются друг с другом:

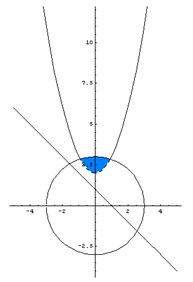


Рисунок 32. Решение системы неравенств ****

***Задача для самостоятельного решения №2.* Изобразить область, заданную на координатной плоскости системой: .**

***Контрольные вопросы:***

1. Дайте определение неравенства с одной переменной.
2. В чем суть метода интервалов?

**Практическая работа №36** «Метод интервалов»

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

- правила решения простых, дробно-рациональных неравенств с одной переменной;

*уметь:*

* решать неравенства методом интервалов.

***Сведения из теории:***

Пусть заданное неравенство имеет вид: . Для решения этого неравенства используется так называемый *метод интервалов*, который состоит в следующем.

1. На числовую ось наносят точки *х*1, , *х*n разбивающие ее на промежутки, в которых выражение  определено и сохраняет знак («плюс» или «минус»). Такими точками могут быть корни уравнений  и . Соответствующие этим корням точки отмечают на числовой оси: закрашенными кружками – точки, удовлетворяющие заданному неравенству, а светлыми кружками – не удовлетворяющие ему.

2. Определяют и отмечают на числовой оси знак выражения  для значений, принадлежащих каждому из полученных промежутков. Достаточно определить знак функции  в любом таком промежутке, а в остальных промежутках знаки «плюс» и «минус» будут чередоваться.



Изменение знаков удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой (*кривой знаков*), проведенной через отмеченные точки и лежащей выше или ниже числовой оси в соответствии со знаком дроби  в рассматриваемом промежутке. Промежутки, которые содержат точки, удовлетворяющие данному неравенству, иногда покрывают штрихами. Заштрихованная область в совокупности с полученными точками будет являться ответом к неравенству:

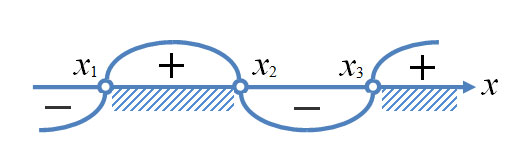


Рисунок 25. Кривая знаков

***Пример 89.***

Решите неравенство: .

Решение:

упрощаем неравенство путем равносильных преобразований: при умножении или делении обеих частей неравенства на отрицательное число, знак неравенства меняется на противоположный:

.

Приведем дроби к общему знаменателю:

,

,

.

Выражения, стоящие в числителе и знаменателе, можно разложить на множители, тогда неравенство примет вид:

.

Далее находим корни уравнений  и .

Из первого получаем *х*1=4, *х*2=1. Из второго получаем *х*3=2, *х*4=3.

Наносим на числовую прямую получившиеся точки, причем точки *х*1, *х*2 обозначаем закрашенными кружочками (для них неравенство выполняется), а точки *х*3, *х*4 светлыми (при этих значениях, выражение, стоящее слева от знака неравенства, не имеет смысла).

Определяем теперь знаки выражения  на полученных промежутках (подставляем любое значение *х* из каждого полученного промежутка в данное выражение), изображаем кривую знаков, заштриховываем те промежутки, на которых исходное неравенство выполняется:

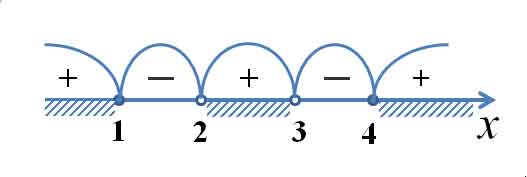


Рисунок 26. Кривая знаков выражения 

Итак, исходному неравенству удовлетворяют следующие значения: *х*Є(-∞; 1]U(2; 3)U[4; +∞).

***Задача для самостоятельного решения №1****.* Решите неравенство: .

***Пример 90.***

Решите неравенство: .

Решение:

подкоренное выражение, как известно, не может принимать отрицательных значений, также не допускается нахождение в знаменателе дроби нуля. Следовательно, область допустимых значений данного неравенства определяется неравенством  и тем условием, что .

Решаем уравнения  и .

Из первого уравнения получаем, что *х*1=9.

Из второго уравнения получаем, что *х*2=2.

Наносим область допустимых значений неравенства и полученные точки на числовую прямую, причем эти точки будут светлыми, поскольку ни одно из значений не удовлетворяет неравенству. Сразу определяем знаки выражения  в каждом из полученных промежутков и рисуем кривую знаков:

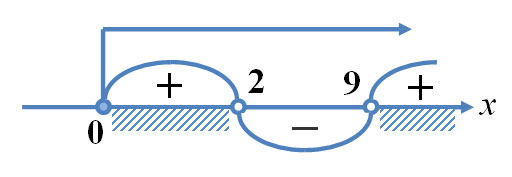


Рисунок 27. Кривая знаков выражения 

Верхней стрелкой на рисунке обозначена область допустимых значений неравенства. Ответом к неравенству будет являться промежуток, соответствующий на рисунке заштрихованной области.

Ответ: *х*Є[0; 2)U(9; +∞).

***Задача для самостоятельного решения №2.*** Решите неравенство: .

***Пример 91.***

Решите неравенство: .

Решение:

подкоренное выражение не может принимать отрицательных значений, а в знаменателе дроби не должно быть нуля. Следовательно, область допустимых значений неравенства определяется следующей системой:

.

Решаем уравнение .

Получаем, что *х*1=0 и . Наносим полученные точки на числовую прямую, не забывая о том, какие из них следует закрасить, а какие осветлить. Изображаем также на ней область допустимых значений и изображаем кривую знаков:

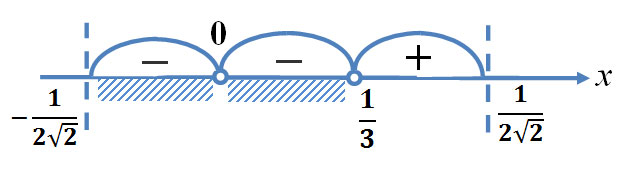


Рисунок 28. Кривая знаков выражения 

Пунктирные лини на рисунке ограничивают область допустимых значений неравенства. Заштрихованная область соответствует решению неравенства.

Ответ: .

***Задача для самостоятельного решения №3.*** Решите неравенство: .

***Контрольные вопросы:***

1. Дайте определение неравенства с одной переменной.
2. В чем суть метода интервалов?

**Практическая работа №38**«Преобразование выражений»

**Цель:** повторение решений выражений

***Цель работы:***

*студент должен:*

*знать:*

* правила преобразования рациональных, иррациональных, степенных выражений;

*уметь:*

* выполнять преобразования рациональных, иррациональных, степенных выражений.

***Сведения из теории:***

*Преобразование алгебраических выражений*, используя приведение дробей к общему знаменателю, формулы сокращенного умножения.

*Формулы сокращенного умножения:*

;

;

;

;

где *а*, *b*, *с* – любые действительные числа;

,

где *а*≠0, *х*1 и *х*2 – корни уравнения .

*Основное свойство дроби и действия над дробями*

*,* где *b*≠0*, с*≠0*;*

*;*

*;*

*;*

*.*

***Пример***

Упростите: 

Решение:

решаем по действиям: 1) деление; 2) сложение; 3) вычитание.

1) Используя формулы сокращенного умножения разности квадратов: , суммы кубов , получим:

;

2) Для сложения приведем дроби к общему знаменателю :



3) Выполним вычитание дробей с одинаковыми знаменателями:



*Преобразование выражений, содержащих радикалы*

Чтобы освободиться от иррациональности в знаменателе необходимо и числитель и знаменатель дроби помножить на одно и то же число, сопряженное к знаменателю.

***Пример***

Освободитесь от иррациональности в знаменателе: .

Решение:

чтобы освободиться от иррациональности в знаменателе необходимо и числитель и знаменатель дроби помножить на одно и то же число, сопряженное к знаменателю: , тогда получим:



*Решение иррациональных уравнений*

Наиболее часто используемым при решении иррациональных уравнений способов является возведение обеих частей уравнения в квадрат.

***Пример***

Решите уравнение: .

Решение:

возведем обе части уравнения в квадрат, при этом в уравнении появятся посторонние корни, поэтому проверка при решении иррациональных уравнений обязательна:



Получилось обычное квадратное уравнение, корни которого вычисляем через дискриминант: *х*1=12, *х*2=7.

Выполним проверку, для этого подставим в наше исходное уравнение получившиеся корни:

*х*1=12: 

*х*2=7: 

Ответ: 12.

***Задания для самостоятельного решения:***

|  |  |
| --- | --- |
| **1 вариант**  №1. Упростите:    №2. Освободитесь от иррациональности в знаменателе:  .  №3. Решите иррациональное уравнение: . | **2 вариант**  №1. Упростите:    №2. Освободитесь от иррациональности в знаменателе: .  №3. Решите иррациональное уравнение: . |
| **3 вариант**  №1. Упростите:    №2. Освободитесь от иррациональности в знаменателе:  .  №3. Решите иррациональное уравнение: . | **4 вариант**  №1. Упростите:    №2. Освободитесь от иррациональности в знаменателе: .  №3. Решите иррациональное уравнение: . |
| **5 вариант**  №1. Упростите:    №2. Освободитесь от иррациональности в знаменателе:  .  №3. Решите иррациональное уравнение: . | **6 вариант**  №1. Упростите:    №2. Освободитесь от иррациональности в знаменателе: .  №3. Решите иррациональное уравнение: . |
| **7 вариант**  №1. Упростите:    №2. Освободитесь от иррациональности в знаменателе:  .  №3. Решите иррациональное уравнение: . | **8 вариант**  №1. Упростите:    №2. Освободитесь от иррациональности в знаменателе: .  №3. Решите иррациональное уравнение: . |
| **9 вариант**  №1. Упростите:    №2. Освободитесь от иррациональности в знаменателе: .  №3. Решите иррациональное уравнение: . | |

***Контрольные вопросы:***

1. Какие формулы можно использовать при преобразовании алгебраических выражений?
2. Как можно освободиться от иррациональности в знаменателе?
3. Сформулируйте правила решения иррациональных уравнений.

**Практическая работа №38** «Подготовка к экзамену»

**Цель: повторение изученного материала.**

**Выполнить тест:**

**Вариант экзаменационной работы:**

|  |
| --- |
| ***Ответом на задания 1 - 12 является целое число или конечная десятичная дробь. Это число надо записать в ответ выполняемого задания. Задания 1 – 12 оцениваются в 1 балл.*** |

**1**  Вычислить 

**2**  В пачке 500 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 300 листов. Какого наименьшего количества пачек бумаги хватит на 6 недель?

**3** Найдите корень уравнения: 21-4х = 32

**4**  В сборнике билетов по химии всего 40 билетов, в 20 из них встречается вопрос по теме "Соли". Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете обучающемуся достанется вопрос по теме "Соли".

**5** Вычислить ****

**6**. Материальная точка движется прямолинейно по закону , где *x* – расстояние от точки отсчета в метрах, *t* – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени *t* = 3 с.

**7**. Найдите значение выражения 

**8** Найдите корень уравненияlog5(3x + 1) = 2



**9** Найдите значение выражения   при а = 2



**10** В цилиндрический сосуд налили 2000 см3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 12 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 9 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см3.

**11**  Найдите sinα, если cosα = 0,6 и 00< α < 900

**12** Решите неравенство 22х-9 < 128 и укажите в ответе наибольшее целое решение.

|  |
| --- |
| ***Задания 13-19 выполняются с подробным решением. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение и верно сформулируйте ответ. Задания 13 – 15 оцениваются в 2 балла, 16 – 17 в 3 балла, 18 – 19 в 4 балла.*** |

**13** Решите неравенство log 0,5 (3x – 1) < – 3

**14** Решите уравнение 

|  |
| --- |
| **15** В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* с основанием *ABCD* боковое ребро *SA* равно 5, сторона основания равна 3√2 . Найдите объём пирамиды. |

**16** Решите систему уравнений 

**17** Найдите наименьшее значение функции у = х3 – 27х на отрезке [0;4]

**18** Найдите площадь криволинейной трапеции ограниченной линиями. у = х3 + 2; у = 0; х = 0; х = 2. Сделайте чертеж.

**19** В правильную треугольную призму вписан цилиндр. Найдите площадь его поверхности, если сторона основания призмы равна , а высота – 3 см.



**Список литературы**

**Основная литература**

* Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Математика: алгебра и начала математического анализ, геометрия. Алгебра и начала анализа. 10-11, Издательство Просвещение, 20.05.2020
* Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. Математика: алгебра и начала математического анализ, геометрия. Геометрия. 10-11, Издательство Просвещение, 20.05.2020
* Венер А.Л., Карп А.П., Математика: алгебра и начала математического анализ, геометрия, 10, Издательство Просвещение, 20.05.2020
* Венер А.Л., Карп А.П., Математика: алгебра и начала математического анализ, геометрия, 11, Издательство Просвещение, 20.05.2020
* Мордкович А.Г., Семенов А.В., Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала анализа (в двух частях), 10 – 11, ИОЦ Мнемозина, 20.05.2020
* Муравин Г.К., Муравина О.В., Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала анализа, 10 – 11, ООО Дрофа, 20.05.2020
* Погорелов А.В., Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 – 11, Издательство Просвещение, 20.05.2020
* Смирнов В.А., Смирнова И.М., Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 – 11, Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ, 20.05.2020
* Шарыгин И.Ф., Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 – 11, ООО Дрофа, 20.05.2020
* Мерзляк А.Г., Математика. Алгебра и начала математического анализа. 10, Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ, 20.05.2020
* Мерзляк А.Г., Математика. Геометрия. 10, Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ, 20.05.2020
* Мерзляк А.Г., Математика. Алгебра и начала математического анализа. 11, Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ, 20.05.2020
* Мерзляк А.Г., Математика. Геометрия. 11, Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ, 20.05.2020

**Электронные ресурсы**

* <http://www.math.ru>
* Газета "Математика" издательского дома "Первое сентября" - <http://mat.1september.ru>
* Математика в Открытом колледже - <http://www.mathematics.ru>
* Математика: Консультационный центр преподавателей и выпускников МГУ
* <http://school.msu.ru>
* Материалы по математике в Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов - <http://school_collection.edu.ru/collection/matematika/>
* Московский центр непрерывного математического образования (МЦНМО) -
* <http://www.mccme.ru>
* <http://moodle.dist-368.ru/> - Дистанционная школа
* <http://school-collection.edu.ru/> – единая коллекция цифровых образовательных ресурсов.
* <http://www.alleng.ru/edu/math3.htm> - типовые математические задания ЕГЭ
* <http://eek.diry.ru/p62222263.htm> - подготовка к ЕГЭ по математике
* <http://reshuege.ru/> - образовательный портал для подготовки к ЕГЭ